Dana - Codruța Vișan

MODELAREA DINAMICĂ A SISTEMELOR ROTOR-LAGĂRE

Editura PRINTECH

DANA – CODRUȚA VIȘAN

MODELAREA DINAMICĂ A SISTEMELOR ROTOR- LAGĂRE

DANA – CODRUȚA VIȘAN

MODELAREA DINAMICĂ A SISTEMELOR ROTOR- LAGĂRE

Editura PRINTECH
2008

TIPAR:
Editura PRINTECH (S.C. ANDOR TIPO S.R.L.)
Str.TUNARI nr.11, sector 2, BUCURESTI
Tel/Fax : 211.37.12

Certificat nr.1303

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României

DANA – CODRUŢA VIŞAN
MODELAREA DINAMICĂ A SISTEMELOR ROTOR- LAGĂRE /
Dana – Codruţa Vişan

Bucureşti, Printech, 2008
Bibliogr.
ISBN 978-973-718-990-5

Motto:

Daca oamenii ar cunoaşte puterea cuvântului lui Hristos: „...învăţaţi-vă de la Mine, că sunt blând şi smerit cu inima şi veţi avea odihnă sufletelor voastre. [Mat.11,29]", atunci lumea întreagă ar lăsa toate celelalte ştiinţe şi învăţături şi ar învăţa numai această ştiinţă cerească...

Sfântul Siluan Athonitul –
„Între iadul deznădejdii şi iadul smereniei"

CUPRINS

Prefaţă

Cartea a fost scrisă pentru aceia care sunt pasionaţi de acest domeniu îngust dar foarte vast al dinamicii rotorilor: modelarea dinamică a rotorilor.

În speţă, cartea se adresează studenţilor masteranzi, doctoranzilor şi specialiştilor în domeniu.

Această carte oferă cititorului atât istoricul dezvoltării acestei ramuri a ştiinţei, cât şi unele noutăţi – la momentul scrierii cărţii – în ceea ce priveşte punerea problemelor și rezolvarea acestora.

Cartea continuă preocupările mele începute în teza de doctorat având aceeaşi temă şi sunt recunoscătoare profesorului Mircea Radeş, conducătorul meu de doctorat, pentru ajutorul şi îndrumările oferite, pline de profesionalism şi de talent.

Dana-Codruţa Vişan

Simboluri şi notaţii utilizate în lucrare

$\mathbf{A_S = \chi A}$	aria efectivă de forfecare a secţiunii arborelui, [m^2]
E	modulul de elasticitate longitudinal, [N/m^2]
EI	modulul de rigiditate la încovoiere
G	modulul de elasticitate transversal, [N/m^2]
$\mathbf{GA_S}$	modulul de rigiditate efectiv la forfecare
i , j	nodurile care definesc capetele elementului de arbore
$\mathbf{I = I_y = I_z}$	momentul de inerţie axial al secţiunii transversale, [m^4]
$\mathbf{I_P=2I}$	momentul de inerţie polar al secţiunii transversale, [m^4]
$\mathbf{J_P, J_T}$	momentul de inerţie masic polar, respectiv transversal, [$kg\cdot m^2$]
$\mathbf{K = 12\frac{EI}{GA_S L^2}}$	constanta de forfecare
L	lungimea elementului de arbore, [m]
r	raza interioară a elementului de arbore, [m]
R	raza exterioară a elementului de arbore,[m]
u	deplasarea laterală în lungul axei Ox
v	deplasarea în lungul axei Oy
w	deplasarea în lungul axei Oz
γ_{xy}	deformaţia de forfecare (lunecarea specifică) în planul x-y
γ_{xz}	deformaţia de forfecare (lunecarea specifică) în planul x-z

μ	masa pe unitatea de lungime, $\mu = \rho A$
$\hat{\mu}$	masa de rotaţie pe unitatea de lungime, $\hat{\mu} = \rho I$
υ	coeficientul lui Poisson
$\xi = \frac{x}{L}$	coordonata adimensională
ρ	densitatea materialului arborelui, [kg/m^3]
φ	rotirea în jurul axei Oy
χ	factorul de forfecare
ψ	rotirea în jurul axei Oz
ω	pulsaţia proprie de precesie
Ω	viteza unghiulară a rotorului, [rad/sec]
$\aleph_{xy}$	rotirea specifică în planul x-y
$\aleph_{xz}$	rotirea specifică în planul x-z
$[c^b]$	matricea de rigiditate pentru lagărele cu alunecare
$\{f_y^s\}$	subvectorul forţelor nodale pentru elementul de arbore (shaft) în planul x-y
$\{f_z^s\}$	subvectorul forţelor nodale pentru elementul de arbore în planul x-z
$\{f^s\}$	vectorul forţelor nodale pentru elementul de arbore
$\{f_y^d\}$	subvectorul forţelor de dezechilibru din planul X-Y pentru disc

$\{\mathbf{f}_z^{\,d}\}$	subvectorul forţelor de dezechilibru din planul X-Z pentru disc
$\{\mathbf{f}^{\,d}\}$	vectorul forţelor de dezechilibru pentru disc
$[\mathbf{g}^S]$	submatricea giroscopică pentru elementul de arbore în planul x-y sau x-z
$[\mathbf{g}^d]$	matricea giroscopică pentru un disc axial simetric
$[\mathbf{G}^S]$	matricea giroscopică globală pentru elementul de arbore
$[\mathbf{k}^S]$	submatricea de rigiditate pentru elementul de arbore în planul x-y sau x-z
$[\mathbf{k}^b]$	submatricea coeficienţilor de influenţă pentru lagărele cu alunecare
$[\mathbf{K}^S]$	matricea de rigiditate globală pentru elementul de arbore
$[\mathbf{m}^S]$	submatricea de masă pentru elementul de arbore în planul x-y sau x-z $\quad [\mathbf{m}^S]=[\mathbf{m}_T^S]+[\mathbf{m}_R^S]$
$[\mathbf{m}_T^S]$, $[\mathbf{m}_R^S]$	submatricea de masă de translaţie, respectiv de rotaţie pentru elementul de arbore în planul x-y sau x-z
$[\mathbf{M}^S]$	matricea de masă globală pentru elementul de arbore
$[\mathbf{m}^d]$	matricea de masă pentru un disc axial simetric în planul X-Y sau X-Z
$\lfloor \mathbf{N} \rfloor$	funcţiile de formă pentru translaţii
$\lfloor \tilde{\mathbf{N}} \rfloor$	funcţiile de formă pentru rotiri

$\lfloor \hat{\mathbf{N}} \rfloor$	alt set de funcţii de formă $\lfloor \hat{\mathbf{N}} \rfloor = \lfloor \tilde{\mathbf{N}} \rfloor - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} \left\lfloor \frac{\mathbf{dN}}{\mathbf{d\xi}} \right\rfloor$
$\{\mathbf{q}\}$	vectorul coordonatelor generalizate
$\{\mathbf{Q}\}$	vectorul forţelor generalizate
$\{\mathbf{u}_y{}^s\}$	subvectorul deplasărilor nodale pentru elementul de arbore în planul x-y
$\{\mathbf{u}_z{}^s\}$	subvectorul deplasărilor nodale pentru elementul de arbore în planul x-z
$\{\mathbf{u}^s\}$	vectorul deplasărilor nodale pentru elementul de arbore
$\{\mathbf{u}_y{}^d\}$	subvectorul deplasare din planul X-Y pentru disc
$\{\mathbf{u}_z{}^d\}$	subvectorul deplasare din planul X-Z pentru disc
$\lfloor \chi \rfloor$	funcţiile de formă pentru deformaţiile de forfecare la elementul CON 12.

1. Introducere

1.1. Definirea problemei

Tema lucrării de faţă este modelarea dinamică a sistemelor rotor-lagăre, temă izvorâtă din necesitatea practică de proiectare şi analiză dinamică a maşinilor cu rotor şi din nevoia de cunoaştere şi interpretare a răspunsului dinamic al acestora.

În modelarea dinamică a rotorului, lagărelor şi a structurii de suport, se ţine cont că acestea lucrează ca un sistem, răspunzând împreună solicitărilor dinamice, intercondiţionându-se reciproc. Rotorul este o parte integrantă a unui sistem dinamic, comportarea lui fiind determinată de poziţia şi rigiditatea lagărelor, a etanşărilor, a piedestalurilor şi a fundaţiei, precum şi de amortizarea acestora.

Modelul de calcul necesar studiului dinamic al sistemelor rotor-lagăre se poate realiza prin două metode:

1. Metoda matricelor de transfer;
2. Metoda elementelor finite.

În lucrarea de faţă se foloseşte metoda elementelor finite, pentru posibilitatea mai mare pe care o are de modelare a tuturor elementelor, efectelor şi interacţiunilor dintre părţile componente ale maşinilor cu rotor, spre deosebire de posibilităţile limitate de modelare pe care o are metoda matricelor de transfer, în aceleaşi situaţii.

Corespunzător metodei de calcul alese, pentru modelarea dinamică a rotorilor există o mare diversitate de elemente finite cu care se poate realiza modelul: elemente brick, elemente shell, elemente de tip bară cu două noduri la capete etc.

În lucrarea de faţă, arborele este modelat cu elemente finite de tip bară cu două noduri la capete, de tip C^1.

În Catedra de Rezistenţa materialelor din Universitatea Politehnica Bucureşti a fost elaborat un program de calcul de dinamica rotorilor, în mediul MATLAB. Faţă de programul existent, lucrarea de faţă aduce îmbunătăţiri, completând elementul de arbore de tip Bernoulli-Euler cu care lucrează acesta, cu elementul de arbore de tip Timoshenko. De asemenea pentru modelarea arborilor cu porţiuni tronconice se introduc două elemente finite conice de tip C^1.

1.2. Scopul lucrării

Scopul lucrării a fost elaborarea unui model îmbunătăţit pentru calculul răspunsului dinamic al sistemelor rotor-lagăre. S-a urmărit modelarea arborelui rotorului cu elemente finite de grindă Timoshenko, de tip C^1, precum şi, atunci când este cazul, cu elemente conice cu două noduri, de tip C^1.

În acest sens, după o largă consultare bibliografică (aproximativ 200 de titluri), au fost alese pentru studiu elementele CON8 şi CON12 care au fost implementate în programul DRACULA (**D**inamica **R**otorilor **A**sistată de Cal**CULA**tor) în mediul MATLAB şi au fost făcute simulări numerice pentru validarea programului.

1.3. Organizarea lucrării

Lucrarea este structurată pe şase capitole, primul fiind de introducere, în care s-a definit problema modelării sistemelor rotor-lagăre, s-a prezentat scopul şi organizarea lucrării.

În capitolul al doilea s-a descris stadiul actual al cercetărilor în domeniul modelării dinamice a sistemelor rotor-lagăre şi problemele derivate din acesta, cu peste 200 de referiri bibliografice.

Începând cu al treilea capitol s-au prezentat mai întâi elementele finite cilindrice de bară cu două noduri la capete, adică elementul de bară de tip Bernoulli-Euler şi elementul de bară de tip Timoshenko. Pentru fiecare element în parte s-a arătat modul de obţinere a ecuaţiilor de mişcare, a funcţiilor de formă în două plane perpendiculare între ele, apoi modul de obţinere a matricelor de masă, de rigiditate şi a vectorului forţelor de dezechilibru masic pentru elementul de tip Bernoulli-Euler şi pentru elementul de tip Timoshenko, în plus şi matricea giroscopică. Apoi s-au prezentat două tipuri de elemente finite tronconice de bară cu două noduri, numite CON 12 şi CON 8, primul având şase grade de libertate pe nod, iar al doilea patru grade de libertate pe nod. Ambele se bazează pe teoria de bară Timoshenko, considerând în calcule şi deformaţia de forfecare, dar în moduri diferite de la un element la celălalt. S-au determinat matricele elementelor care au dimensiuni 8x8 pentru elementul CON 8 şi 12x12 pentru elementul CON 12, pentru care în vederea reducerii ordinului matricelor la 8x8, se face o condensare statică. S-a prezentat şi ecuaţia matriceală de mişcare pentru fiecare element conic. Tot în capitolul trei s-au tratat şi discurile rigide şi lagărele. S-au prezentat matricele prin care acestea se introduc în modelul de calcul.

În capitolul patru s-a descris răspunsul dinamic al rotorilor modelaţi cu elemente de bară de tip Timoshenko cilindrice şi conice. Au fost apoi

realizate simulări numerice cu ajutorul programului mai sus amintit şi s-au făcut observaţii în urma efectelor puse în evidenţă.

În capitolul cinci s-au prezentat rezultatele experimentale obţinute în urma măsurărilor realizate în laboratorul de Dinamica rotorilor din Catedra de Rezistenţa materialelor din Universitatea Politehnica Bucureşti. Aceste rezultate au fost comparate cu rezultatele obţinute pentru acelaşi rotor în urma simulării numerice, în vederea validării programului considerat.

În capitolul şase s-au prezentat concluziile desprinse în urma studiilor efectuate şi contribuţiile originale ale autoarei.

În încheiere s-au adăugat patru Anexe cu diverse calcule ajutătoare.

2. Stadiul actual al cercetărilor în domeniul modelării dinamice a sistemelor rotor-lagăre

Dinamica sistemelor rotor-lagăre s-a conturat ca o disciplină de sine stătătoare şi un domeniu de cercetare interdisciplinară în momentul în care s-a recunoscut importanţa efectului lagărelor şi etanşărilor asupra răspunsului dinamic al rotorilor.

Interesul crescând privind studiul vibraţiilor maşinilor cu rotor se datoreşte faptului că peste 80% din problemele ce apar la aceste maşini se datoresc vibraţiilor. Efortul continuu de a micşora greutatea maşinii pe unitatea de putere dezvoltată, precum şi costul extrem de ridicat al întreruperilor accidentale din funcţionare, la maşinile ce lucrează în instalaţii cu flux tehnologic continuu, subliniază importanţa prevenirii vibraţiilor la maşinile cu rotor. Pe măsură ce noile soluţii constructive s-au apropiat de limitele de rezistenţă ale materialelor, problemele de vibraţii s-au înmulţit, impunând dezvoltarea cercetării şi metodelor de proiectare în două domenii de prim interes practic: *dinamica sistemelor rotor-lagăre* şi *vibraţiile ansamblului disc-palete*.

Creşterea spectaculoasă a puterii maşinilor nu a fost însoţită de o creştere corespunzătoare a dimensiunilor acestora datorită cerinţelor privind creşterea puterii dezvoltate pe un kilogram de material. Semnificativă pentru progresul tehnic în acest domeniu este dezvoltarea turbinelor cu abur în Europa. De la prima *turbină cu acţiune* construită în 1883 de inginerul suedez Gustav de Laval şi prima *turbină cu reacţiune* cu mai multe trepte, construită în 1884 de englezul Charles Parsons şi până la turbinele pentru centrale nucleare de astăzi, evoluţia este spectaculoasă.

Dacă la maşinile mici, de exemplu motoarele electrice, cu turaţii relativ mici şi lagăre cu rulmenţi, echilibrarea şi calculul dinamic al rotorului nu ridică probleme deosebite, în schimb, maşinile mari, cu rotori lungi şi flexibili, cu lagăre de alunecare, etanşări, piedestaluri şi carcase relativ elastice, cu turaţii mari, au impus dezvoltarea şi perfecţionarea continuă a metodelor de calcul dinamic şi de măsurare a vibraţiilor.

Primul studiu al turaţiilor critice ale unui arbore elastic de secţiune constantă a fost făcut în 1869 de Rankine [142], care a introdus termenul de ***turaţie critică***, crezând că este vorba de o instabilitate, rotorul neputând funcţiona deasupra turaţiei critice. Deşi prima rezolvare corectă a fost dată de Föppl [53], confuzia a persistat până la publicarea în 1919 a articolului lui Jeffcott [87] asupra precesiei datorită dezechilibrului masic.

În 1894 Dunkerley [46] a publicat rezultatele studiilor sale privind turaţiile critice ale arborilor cu mai multe discuri şi a propus metoda şi formula care îi poartă numele. În 1916 Stodola [164] a publicat un studiu despre influenţa lagărelor asupra precesiei rotorului elastic.

Influenţa amortizării interne asupra mişcării rotorilor a fost considerată pentru prima oară de Newkirk [124] în 1924 în studiul vibraţiilor compresoarelor de la furnalele înalte. În 1925, Newkirk şi Taylor [123] semnalează fenomenul de instabilitate a rotorilor în lagăre cu ulei (fenomenul „oil whirl") explicat abia în 1952 de Poritsky [136].

În 1933 Smith [157] a publicat un articol de sinteză asupra principalelor probleme ale Dinamicii rotorilor. Între 1932-1935 Robertson [144] a studiat în detaliu principalele probleme de instabilitate a mişcării rotorilor şi precesia acestora în regim tranzitoriu, la trecerea prin turaţiile critice.

În 1945 Prohl [137] a propus metoda care îi poartă numele pentru calculul turaţiilor critice la rotorii cu mase concentrate. Lund [111, 107] a dezvoltat analiza cu matrice de transfer a sistemului rotor-lagăre. Ruhl [151] şi Nordmann [127] au utilizat în tezele de doctorat ***metoda elementelor finite*** pentru analiza sistemelor rotor-lagăre, dar primele articole au fost publicate de Ruhl şi Booker [150] în 1972 şi Gash [57] în 1973. Reducerea modelului cu elemente finite a fost studiată începând cu 1980 de Rouch şi Kao [148] şi Jäcker [86], ultimul introducând şi efectul fundaţiei asupra răspunsului rotorului.

În 1984, Hashish şi Sankar publică un articol [20], în care un sistem rotor-lagăr este modelat utilizând metoda elementelor finite. Modelul matematic ia în considerare momentul giroscopic, inerţia la rotaţie, deformaţia de forfecare, amortizarea internă vâscoasă, amortizarea histeretică, rigiditatea arborelui amortizarea din lagăre şi elasticitatea suportului lagărelor. Se foloseşte elementul de grindă Timoshenko şi se prezintă modul de construire a matricelor de masă, de rigiditate, de amortizare şi giroscopică, de ordin 4x4, necesare pentru calcularea răspunsului sistemului rotor-lagăr.

O problemă importantă care se pune în tehnica modelării arborelui din sistemele rotor-lagăre şi care se tratează în lucrarea de faţă pe larg este alegerea tipului de element de arbore utilizat în calcule, respectiv elemente de arbore de tip Timoshenko care ţin cont pe lângă încovoiere şi de inerţia la rotaţie a elementului şi de deformaţiile de forfecare ale acestuia, sau elemente de arbore Bernoulli-Euler care nu ţin cont decât de încovoierea elementului. De asemenea, se pune problema eficienţei modelării secţiunilor tronconice de arbore, prin elemente finite cilindrice în trepte sau prin elemente finite conice, acesta fiind şi obiectul lucrării.

În ceea ce priveşte vibraţiile grinzilor Timoshenko, literatura tehnică este foarte bogată. Există publicaţii referitoare la influenţa secţiunii

transversale neuniforme a grinzilor Timoshenko asupra răspunsului dinamic al acestora, la influenţa maselor rigide, la influenţa deformaţiilor de forfecare, la controversatul „spectru de frecvenţe de ordinul doi”, la stabilitatea dinamică a acestor grinzi ş.a.

Cele două articole clasice publicate de Timoshenko în 1921 şi 1922 [172, 173], cu privire la efectul deformaţiilor de forfecare asupra vibraţiilor transversale ale grinzilor, au avut o influenţă covârşitoare în dezvoltarea dinamicii structurilor în secolul al douăzecilea.

Trei decenii mai târziu, după ce Timoshenko a obţinut faimoasa sa ecuaţie, Mindlin a obţinut teoria cu privire la plăcile în vibraţie [119], care constituiau o altă piatră de hotar în teoria dinamică a elementelor structurale.

La aplicarea teoriei Timoshenko la grinzile care vibrează există 5 aspecte importante. Ele pot fi extinse şi asupra elementelor de arbore de tip Timoshenko din alcătuirea unui rotor. Acestea sunt:

1. Considerentele teoretice de bază;
2. Predicţia „spectrului de frecvenţe de ordinul doi”;
3. Consideraţii asupra elementelor structurale cu secţiune transversală neuniformă; prezenţa maselor concentrate sau a rezemărilor elastice;
4. Prezenţa fundaţiilor elastice; cazuri de stabilitate dinamică; efecte neliniare;
5. Rezolvarea problemelor utilizând metoda elementelor finite.

Cele două articole clasice ale lui Timoshenko [172, 173] au pregătit terenul pentru investigaţii analitice în legătură cu:

a) determinarea pulsaţiilor proprii [97, 8, 175, 40, 68, 118, 78, 80-82, 33, 50, 21, 27, 167, 24, 1, 89, 159, 165, 96, 116];
b) analiza mişcării forţate [77, 19, 47];
c) studii privind factorul de forfecare [34, 88].

După cum se ştie, unul din fundamentele teoriei Timoshenko este determinarea factorului de forfecare. Acesta, înmulţit cu aria secţiunii transversale, permite calculul unei arii efective de forfecare, care se utilizează în calcule în locul ariei reale.

Introducerea lui a fost necesară datorită aproximaţiei din teoria lui Timoshenko, în care se neglijează deplanarea secţiunii transversale, şi se calculează o tensiune tangenţială medie, constantă pe înălţimea barei, necesară menţinerii secţiunii plane. Un studiu exhaustiv, citat în multe lucrări actuale, este articolul lui Cowper [34]. În general, se acceptă o valoare statică a factorului de forfecare. În cazul elementelor finite de arbore tronconice, se adoptă o valoare medie, de obicei calculată la mijlocul elementului. În alte lucrări [216] se arată că factoril de forfecare ar trebui să fie funcţie de frecvenţa vibraţiilor.

Un număr considerabil de lucrări au fost prezentate pe tema intitulată „Predicţia spectrului de frecvenţe de ordinul doi pentru grinzile Timoshenko” [42, 3, 15, 102, 160]. Stephen [160] a publicat un excelent studiu examinând spectrul de ordinul doi din punctul de vedere al propagării undelor. El a realizat această analiză utilizând teoria Pochhammer-Chree (în contextul teoriei elasticităţii) în cazul unor bare subţiri, de secţiune circulară şi de lungime infinită şi a ajuns la următoarea concluzie: „Teoria exactă Pochhammer-Chree cu privire la propagarea unei unde într-o grindă de secţiune circulară, prezice posibilitatea unei multitudini de moduri de vibraţie de acelaşi ordin. Teoria de bară Timoshenko prezice existenţa a câte două moduri de vibraţie de acelaşi ordin. Spectrul de frecvenţe de ordinul doi trebuie să fie considerat, pe de o parte, o consecinţă inevitabilă a comportării structurilor, iar pe de altă parte rezultatul unei teorii inginereşti remarcabile”.

Articolul lui Lee [101] constituie una din primele cercetări privind grinzile Timoshenko de secţiune transversală neuniformă. Alte studii interesante pe aceeaşi temă sunt [45, 84].

Cazul rezemărilor elastice ale capetelor barelor este tratat în [4] iar influenţa secţiunilor transversale neuniforme asupra acestora, influenţa maselor rigide etc. sunt luate în considerare în lucrările [115, 72, 146, 147].

Grinzile Timoshenko rezemate pe fundaţii elastice sunt tratate în [36, 187, 189, 2, 114, 18, 203, 204, 35, 55, 103, 176].

Cazul grinzilor vâscoelastice este prezentat în [56, 100, 130], iar răspunsul plastic în [191].

Au fost publicate numeroase studii privind stabilitatea şi analiza dinamică a stabilităţii barelor Timoshenko [122, 20, 92, 93, 2, 128, 152, 155, 18, 131, 156, 176].

Vibraţiile barelor şi cadrelor Timoshenko sunt prezentate în [22, 23, 28, 188, 41, 79, 200, 51].

Cazul grinzilor Timoshenko pretensionate este tratat de Sun [166], cazul vibraţiilor neliniare este prezentat de Rao, Raju şi Raju [143], iar situaţiile termoelastice sunt considerate de Massalas şi Kalpakidis [113].

Grinzile Timoshenko pentru structurile de poduri sunt studiate în 190, 76], iar barele curbe în [145, 85].

În literatură sunt prezentate o mulţime de elemente finite de bară Timoshenko [11, 17, 90, 25, 154, 6, 37, 125, 169, 168, 170, 171, 38, 71, 174, 95, 112, 153, 39, 44, 5, 29]. Thomas, Wilson şi Wilson [169] au împărţit aceste elemente în două clase: elemente simple şi elemente complexe. Un element simplu este un element unidimensional, solicitat la încovoiere într-un singur plan şi care are în total 4 grade de libertate, câte două în fiecare dintre cele două noduri; un element complex este un element care are mai mult de patru grade de

libertate, adică are mai mult de două grade de libertate în fiecare din cele două noduri, sau are mai mult de două noduri.

Articolul lui Akella şi Craggs [5] are aplicaţii la barele în rotaţie. Studiul lui Davis, Henshell şi Warburton [37] extinde aplicarea elementelor Timoshenko la studiul vibraţiilor.

Dezvoltarea metodei elementelor finite pentru analiză în dinamica rotorilor este subiectul a foarte multe publicaţii recente [10, 30, 49, 58, 61, 67, 70, 71, 75, 83, 90, 103, 117, 120,121, 129, 133-135, 139-141, 148, 149-151, 153, 161, 162, 168-171, 174, 177, 179-181, 186, 205]. Acestea au inclus în studiul efectuat cu diferitele tipuri de elemente finite efectele inerţiei la rotaţie, efectul momentului giroscopic, al încărcării axiale, al amortizării interne şi al deformaţiei de forfecare. Totuşi, în majoritatea cazurilor studiate, geometria elementului finit utilizat a fost limitată la elementul cilindric.

În ultimii ani, mulţi cercetători au extins activitatea de analiză în dinamica rotorilor utilizând metoda elementelor finite, după cum urmează:

Nelson şi McVaugh [120], au prezentat elementul de grindă cilindric de tip Rayleigh care ţine cont de încovoiere, de efectul inerţiei la rotaţie şi la translaţie, de momentele giroscopice şi de încărcarea axială, dar neglijează forfecarea. Acest element a fost îmbunătăţit de Zorzi şi Nelson [205], care au introdus efectele amortizării vâscoase interne şi a amortizării histeretice. Mai târziu, Nelson [121] a adăugat la acest tip de element deformaţia de forfecare, ce a condus la elementul de grindă tip Timoshenko care a fost apoi perfecţionat de Őzgűven şi Őzkan [129] luând în calcul şi amortizarea internă după modelul lui Zorzi şi Nelson. Toate aceste elemente erau cilindrice, având aria secţiunii transversale şi momentele de inerţie constante în lungul lor. Ecuaţia de mişcare a fost determinată utilizând 8 grade de libertate pe: câte două translaţii şi două rotaţii la capetele elementului, în plane perpendiculare între ele.

Maşinile moderne au rotori cu geometrii simplificate în modelele utilizate pentru calculul lor. De obicei rotorul se modelează cu o serie de elemente cilindrice în trepte. Dar, pentru arborii conici, erorile introduse de această aproximare pot fi foarte mari. Ca urmare, Rouch şi Kao [149] au elaborat un element finit de grindă de tip Timoshenko utilizabil la modelarea rotorilor în trepte. Acest element se bazează pe concluziile lui Thomas, Wilson şi Wilson [169] potrivit cărora cea mai bună metodă pentru luarea în calcul a deformaţiei de forfecare este de a adăuga două grade de libertate adiţionale la fiecare capăt de element, obţinând astfel 12 grade de libertate pe element.

Rouch şi Kao, pornind de la aceste observaţii, au inclus efectele giroscopice şi au exprimat aria şi momentele de inerţie ale secţiunii elementului ca polinoame de gradul 2, respectiv 4 în funcţie de raza secţiunii transversale.

Modelarea porţiunilor tronconice ale unui rotor prin elemente cilindrice în trepte nu este satisfăcătoare pentru că ea afectează atât simplitatea cât şi exactitatea modelului rotorului. Este preferabilă modelarea unui rotor conic, direct cu elemente conice, atât din punctul de vedere al comodităţii, cât şi din punct de vedere al preciziei calculelor.

În 1985, Greenhill, Bickford şi Nelson [70] completează lucrările existente prezentând un element conic care ia în considerare toate efectele de mai sus.

Un alt element finit conic utilizat în analiza liniară în dinamica rotorilor a fost elaborat de Genta, Gugliotta şi Brussino în 1984 [60]. În continuare, Genta şi Gugliota prezintă în 1988 [58] acest tip de element conic în detaliu, afirmând că rotorii în general şi turbinele cu gaz în particular, includ adesea părţi care nu sunt uşor de modelat cu elemente cilindrice, decât dacă se foloseşte o discretizare foarte fină, ceea ce duce la un număr foarte mare de grade de libertate pentru întreg modelul, deci la calcule foarte laborioase.

Utilizând în calcule modelele prezentate în [58, 60, 70] se pot obţine următoarele facilităţi: analiză statică, calculul turaţiilor critice, determinarea diagramei Campbell, calculul stabilităţii şi răspunsul la dezechilibru (amortizat şi neamortizat).

Elementul conic descris de Greenhill în [70], bazat pe teoria de bară Timoshenko prezintă, în fiecare plan de încovoiere, în plus faţă de gradele de libertate obişnuite - cele două deplasări şi două rotiri- un grad de libertate suplimentar numit deformaţie de forfecare.

În ceea ce priveşte comportarea discurilor montate pe arborele unui rotor, încă din 1948 Green [69] a studiat efectul giroscopic al unui disc rigid asupra precesiei unui rotor flexibil în consolă, iar în 1957 Downham [43] a confirmat experimental existenţa precesiei inverse.

În 1916 Stodola [164] a publicat un studiu asupra influenţei lagărelor asupra precesiei rotorului elastic.

În 1925, Newkirk şi Taylor [123] semnalează fenomenul de instabilitate a rotorilor în lagăre cu ulei (oil whirl) explicat abia în 1952 de Poritsky [136].

Între 1955 şi 1965, Hagg şi Sankey [74], Sternlicht [163], Lund [105] şi alţii au dezvoltat teoria lagărelor hidrodinamice, Yamamoto [202] a studiat lagărele de rostogolire.

Între 1963-1967, Lund [110] şi Glienicke [66] au publicat valori ale coeficienţilor dinamici elastici şi de amortizare pentru mai multe tipuri de lagăre.

Problema lagărelor este prezentată şi în lucrările [12, 32, 52, 65, 94, 98, 108, 109, 132, 192].

În prezent, arborii confecţionaţi din materiale compozite sunt folosiţi în special ca arbori de transmisie în domeniul subcritic [195].

Greutatea unui sistem de arbori de transmisie, determinată de lungimea sa şi de puterea transmisă, poate fi optimizată folosind materialele compozite şi utilizând rotorul în domeniul supracritic, adică la o turaţie mai mare decât prima turaţie critică. Cea mai mare turaţie, este, pentru un sistem particular cea care transmite cel mai mic cuplu în scopul furnizării puterii. Există mai multe publicaţii unde au fost utilizate tehnici de optimizare prin metode numerice pentru a duce la o proiectare foarte bună din punct de vedere al greutăţii arborelui.

Wettergren [194] a prezentat comportarea dinamică a rotorilor confecţionaţi din materiale compozite arătând că este diferită de cea a rotorilor confecţionaţi din materiale convenţionale datorită imperfecţiunilor de fabricaţie a materialelor compozite.

O altă diferenţă importantă între rotorii confecţionaţi din materiale compozite şi cei confecţionaţi din oţel este amortizarea pe care o introduce materialul. Aceasta poate fi până la de două ori mai mare pentru arborii din materiale compozite, în special atunci când unghiul dintre fibrele materialului rotorului este mai mic de 45°. Pentru arborii cu o turaţie mică, acesta este un mare avantaj. Există multe cazuri când torsiunea arborelui a fost evitată folosind materiale compozite pentru realizarea acestuia în loc de oţel. Din nefericire, amortizarea materialului este un dezavantaj pentru rotorii utilizaţi în domeniul supracritic.

Wettergren şi Olson [192] au studiat vibraţiile laterale ale unui rotor orizontal, elastic, rezemat pe lagăre elastice.

Wettergren şi Olson au observat că instabilitatea rotorului apare, în general, în apropierea rezonanţei de dezechilibru. Această instabilitate poate fi evitată realizând diverse combinaţii între amortizarea materialului, amortizarea din lagăre şi dispunerea în diferite poziţii ale discului între lagăre. Rezonanţa, care se datoreşte greutăţii, care apare în apropierea unei turaţii egale cu jumătate din prima turaţie critică, poate fi redusă simţitor cu ajutorul amortizării interne vâscoase. Amortizarea internă este, totuşi, rareori vâscoasă. Pentru un rotor cu amortizare histeretică, în ceea ce priveşte amortizarea materialului, analiza devine foarte complicată. Wettergren [196] a elaborat o metodă pentru analiza amortizării histeretice în cazul în care orbita mişcării nu este circulară.

Wettergren [193] a arătat că se iau în calcul în analiza arborilor din materiale compozite, rezemaţi pe lagăre hidrodinamice, efectele combinate ale peliculei de lubrifiant din lagăre şi ale amortizării materialului. Cea mai mare turaţie permisă pentru un rotor scade din cauza amortizării interne.

Surse de amortizare internă în materialele compozite sunt fenomenele microplastice sau vâscoelastice asociate matricei materialului şi lunecările relative dintre interfeţele matricei şi armăturii. Amortizarea internă a compozitelor poate fi influenţată de proprietăţile matricei şi ale armăturii, de fracţia de volum a fibrei, de mărimea golurilor, de orientarea fibrelor armăturii în raport cu direcţiile de solicitare şi de tratarea suprafeţelor fibrelor. Dacă turaţia este mai mare decât aproximativ 1000 rad/sec, factorul de pierdere începe să crească cu creşterea turaţiei.

Willway [198] ajunge la concluzia că în răşinile epoxidice există o variaţie considerabilă în disiparea energiei. Este evident că proprietăţile dinamice ale răşinilor vâscoelastice depind de turaţia rotorului şi de temperatura de lucru a acestuia.

Wettergren [195] tratează amortizarea ca fiind proporţională cu modulul de elasticitate şi prezintă o metodă de utilizare a amortizării materialului la rotorii din compozite şi analizează şi alte diferenţe ce există între rotorii confecţionaţi din materiale obişnuite şi cei confecţionaţi din compozite în sensul amortizării materialului. Wettergren studiază amortizarea materialului pentru o răşină epoxy cu fibre de carbon având un modul de elasticitate ridicat, pentru diferite unghiuri de dispunere a fibrelor în raport cu direcţia tensiunilor. Au fost luate în calcul situaţiile în care fibrele sunt în lungul tensiunilor, perpendiculare pe acestea şi tangenţiale. S-a ajuns la concluzia că amortizarea, deci coeficientul de amortizare are un minim când unghiul de dispunere al fibrelor este cuprins între 10° şi 45°, care din fericire, pentru majoritatea aplicaţiilor este intervalul care asigură obţinerea celei mai mici greutăţi posibile a rotorului.

Mai mult, materialele compozite pot avea amortizarea mai mare decât a oţelului sau a aluminiului, o dată până la de două ori.

Studiul a fost făcut utilizând elemente finite de grindă specifice laminatelor compozite cu pereţi subţiri, având câte 10 grade de libertate pe nod, element dezvoltat de Wu şi Sun [199].

Problema comportării materialelor compozite în dinamică este tratată şi în [7, 64, 178].

Studii cuprinzătoare privind dinamica rotorilor sunt prezentate şi în [9, 16, 59, 63, 91, 99, 106, 126, 182-185, 201].

Instrumentul matematic utilizat în calculul dinamic al rotorilor este prezentat în [13, 14, 26, 31, 54, 62, 138, 197].

3. Modele cu elemente finite ale sistemelor rotor-lagăre

Proiectarea unor sisteme rotor-lagăre de performanţe ridicate necesită modele analitice şi experimentale care să simuleze cât mai bine comportarea sistemelor reale. Totodată se urmăreşte şi obţinerea de modele eficiente din punct de vedere al timpului şi costului calculelor, pentru că nu trebuie uitat că modelele sunt o reflectare a stadiului dezvoltării tehnologiilor de calcul.

La proiectarea mecanică a rotorului, lagărelor şi a structurii de suport, se ţine cont că acestea lucrează ca un sistem, răspunzând împreună solicitărilor dinamice, intercondiţionându-se reciproc. Rotorul este o parte integrantă a unui sistem dinamic, cunoaşterea lui fiind determinată de poziţia şi rigiditatea lagărelor, a etanşărilor, a piedestalurilor şi a fundaţiei, precum şi de amortizarea acestora.

Rotorul este elementul principal al unei maşini rotative, funcţia lui fiind generarea sau transmiterea puterii. El constă dintr-un arbore pe care se montează discuri cu palete sau roţi cu canale radiale, iar în cazul maşinilor electrice – înfăşurările bobinelor. Rotorul nu este niciodată perfect rigid. Totuşi, în practică, se numesc rotori rigizi cei care lucrează la 1/3 din prima turaţie critică de încovoiere. Rotorii elastici sunt cei care lucrează aproape de, sau deasupra primei turaţii critice de încovoiere, astfel că forţele centrifuge datorate dezechilibrului remanent influenţează deformaţiile rotorului.

La cele mai multe maşini, rotorii au arbori cu secţiune transversală axial-simetrică. Dacă pe anumite porţiuni secţiunea transversală este nesimetrică, atunci rigiditatea la încovoiere a rotorului faţă de o axă transversală fixă variază în timpul rotirii şi apar mişcări de precesie nesincronă şi instabilităţi. **Arborele** rotorilor poate fi modelat ca bara de tip Bernoulli-Euler sau Timoshenko, ţinând cont sau nu de efectul inerţiei la rotaţie faţă de axa transversală, de efectul forfecării, incluzând în plus efectul cuplurilor giroscopice. **Discurile**, considerate de obicei rigide, intervin prin parametrii concentraţi: masa şi momentele de inerţie masice, polar şi transversal. **Lagărele** se aleg în funcţie de încărcarea pe reazem şi de turaţie, ţinând cont de solicitarea dinamică, de spaţiul disponibil, de pierderile de putere, de simplitatea soluţiei constructive şi de cerinţele de durabilitate şi fiabilitate. La început, lagărele au fost considerate rigide. Ulterior s-a ţinut cont şi de elasticitatea radială a lagărelor, apoi de amortizarea acestora. La lagărele cu rulmenţi şi la lagărele cu aer, amortizarea poate fi neglijată. La lagărele de alunecare, proprietăţile elastice

şi de amortizare depind de turaţie şi de încărcare. La lagărele cu rulmenţi, constanta elastică este independentă de turaţia maşinii şi de încărcare. În general se consideră numai rigiditatea radială a lagărelor, cea unghiulară fiind relativ mică.

La lagărele de alunecare, în cazul regimului dinamic staţionar, forţa datorită presiunii totale egalează sarcina statică pe lagăr. Dacă fusul în mişcare are o mişcare de precesie, în filmul de lubrifiant apar tensiuni suplimentare, care produc forţe dinamice suplimentare asupra fusului. Forţa dinamică depinde de amplitudinea deplasării şi de viteza mişcării centrului fusului, însă, spre deosebire de forţele din alte lagăre, nu are aceeaşi direcţie cu mişcarea pe care o produce, fiind defazată în timp şi în spaţiu.

Descompunând forţa dinamică în două componente în lungul unor axe de coordonate fixe *Oy* şi *Oz* legate de lagăr, notând cu y, respectiv cu z, componentele deplasării centrului fusului pe cele două direcţii, se stabilesc relaţiile:

$$\begin{aligned} \mathbf{F_y} &= -\mathbf{K_{yy}\,y} - \mathbf{C_{yy}\,\dot{y}} - \mathbf{K_{yz}\,z} - \mathbf{C_{yz}\,\dot{z}}, \\ \mathbf{F_z} &= -\mathbf{K_{zy}\,y} - \mathbf{C_{zy}\,\dot{y}} - \mathbf{K_{zz}\,z} - \mathbf{C_{zz}\,\dot{z}}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Aceste relaţii sunt exacte numai pentru deplasări mici, însă în practică s-au dovedit valabile pentru deplasări de trei ori mai mari decât jocul în lagăr. Coeficienţii elastici K_{yy}, K_{yz}, K_{zy}, K_{zz} şi coeficienţii de amortizare C_{yy}, C_{yz}, C_{zy}, C_{zz} se calculează cu ajutorul relaţiilor stabilite în teoria lubrificaţiei şi sunt caracteristici unui anumit lagăr. Ei depind de configuraţia lagărului, de proprietăţile lubrifiantului, fiind funcţie de poziţia centrului fusului, variind deci cu turaţia maşinii. Neegalitatea termenilor de cuplaj $K_{yz} \neq K_{zy}$ este cauza unui anumit tip de precesie instabilă a rotorilor.

Etanşările inelare cu fluid sau cu gaz se consideră de obicei a fi izotrope, deci coeficienţii diagonali ai matricelor de rigiditate şi de amortizare sunt egali, iar coeficienţii de cuplaj sunt egali şi de sens contrar. Cele două componente ale forţei cu care etanşările lucrează asupra rotorului se exprimă sub forma:

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{F_y} \\ -\mathbf{F_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{k} \\ -\mathbf{k} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{c} \\ -\mathbf{c} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} \\ \dot{\mathbf{Z}} \end{Bmatrix} + [\mathbf{M}] \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{Y}} \\ \ddot{\mathbf{Z}} \end{Bmatrix}. \tag{3.2}$$

Termenul inerţial este neglijabil la etanşările cu gaz, la care rigidităţile directe pot fi foarte mici, chiar negative. În cazul etanşărilor relativ lungi se introduc şi coeficienţi dinamici unghiulari, deoarece asupra rotorului acţionează şi cupluri, iar forţele produc şi rotiri, iar cuplurile produc şi deplasări liniare.

Piedestalurile deformabile intervin în răspunsul dinamic al maşinilor, în special în cazul ventilatoarelor, suflantelor, pompelor centrifuge şi

al turbomaşinilor cu carcase flexibile şi lagăre în consolă. Modelul de calcul include de obicei rigiditatea şi amortizarea suporţilor lagărelor, iar în unele cazuri şi masa echivalentă a acestora.

Fundaţia, placa de bază şi terenul de rezemare sunt incluse mai rar în modelul de calcul, influenţa lor asupra răspunsului rotorului fiind în general mică. Totuşi, în unele cazuri, mai ales la ventilatoare mari, pe piedestaluri de beton, se ţine cont de elasticitatea terenului de fundaţie.

De obicei, la lagăre şi piedestaluri, chiar în cazul caracteristicilor independente de turaţie, rigiditatea în plan orizontal este mai mică decât cea în plan vertical. Această anizotropie duce la o dedublare a turaţiilor critice. Uneori însă, datorită amortizării puternice, separarea celor două turaţii critice din cauza ortotropiei lagărelor nu apare distinct în răspunsul la dezechilibru al rotorilor. De asemenea, este posibil ca unele moduri de precesie, în special cele retrograde, să fie amortizate supracritic, deci să nu apară în diagramele frecvenţelor proprii şi nici în cele de răspuns la dezechilibru.

Metodele de calcul şi modul de interpretare a rezultatelor analizei dinamice a rotorilor au avut o evoluţie remarcabilă. În urmă cu 40 de ani, calculele se făceau de preferinţă grafic, considerând reazeme rigide în dreptul lagărelor şi tratând separat fiecare rotor dintr-o linie de arbori. Analiza se limita la determinarea *turaţiilor critice neamortizate* şi proiectarea rotorului astfel încât între domeniul turaţiilor de lucru şi orice turaţie critică să existe oarecare separare.

Ulterior, reazemele rigide au fost înlocuite cu elemente deformabile având constanta elastică egală cu cea a filmului de lubrifiant din lagăre, adăugându-se apoi şi efectul elasticităţii piedestalurilor. S-a luat în considerare efectul cuplării mai multor rotori dintr-o linie de arbori şi s-a apelat la calculatoare numerice de mare capacitate pentru analiza rotorilor cu mai multe discuri.

În unele cazuri au apărut discrepanţe mari între calcule şi încercări, care au fost micşorate introducând efectul amortizării şi determinând *turaţiile critice amortizate*. Calculând răspunsul rotorului la dezechilibru, s-a constatat că turaţiile la care orbitele precesiei sincrone au raze vectoare de valori maxime, numite *turaţii critice de dezechilibru*, diferă de turaţiile critice neamortizate, fiind mai aproape de cele amortizate. Astfel s-a observat că nu toate turaţiile potenţial critice sunt într-adevăr critice, amortizarea puternică aplatizând diagrama răspunsului la dezechilibru iar trecerea prin turaţia critică făcându-se fără o creştere a amplitudinii mişcării de precesie.

În domeniul compresoarelor şi turbinelor pentru instalaţii tehnologice şi pentru centrale electrice, tendinţa actuală de creştere a gabaritului

maşinilor şi a turaţiilor de lucru a dus la o nouă generaţie de maşini la care, inevitabil, una sau două turaţii critice sunt situate în domeniul turaţiilor de lucru.

Pe măsură ce maşinile devin mai mari, elasticitatea filmului de lubrifiant din lagăre şi a suporţilor acestora joacă un rol tot mai important în comparaţie cu rigiditatea rotorului, ducând la scăderea turaţiilor critice şi interferarea lor cu domeniul turaţiilor de lucru. Deoarece caracteristicile dinamice ale lagărelor nu sunt cunoscute exact, turaţiile critice nu pot fi determinate precis, deci criteriul tradiţional de proiectare urmărind evitarea funcţionării la, sau aproape de, o turaţie critică nu mai poate oferi siguranţa necesară.

În practică s-a constatat că se poate funcţiona perfect de sigur şi fiabil la turaţii critice bine amortizate dacă nivelele vibraţiilor nu depăşesc limitele admisibile şi dacă rotorul nu are o sensibilitate pronunţată la dezechilibre masice. Rezultă că răspunsul rotorului la dezechilibru poate furniza informaţiile cele mai utile privind viabilitatea unei soluţii constructive. Efectuând acest calcul pentru diferite distribuţii ale dezechilibrului, judicios alese, astfel încât să se accentueze deformaţia rotorului la diferite turaţii critice de dezechilibru, se poate stabili „cât de critică” este fiecare dintre aceste turaţii şi ce măsuri trebuie luate pentru ca amplitudinile vibraţiilor să rămână în limite normale, chiar în prezenţa dezechilibrelor ce apar în timpul funcţionării normale (eroziuni, depuneri, ruperi de componente, deformări termice etc.).

3.1. Elemente finite de arbore în rotaţie

La modelarea cu elemente finite a sistemului rotor-lagăre, arborele este discretizat utilizând un număr mai mic de elemente decât numărul de secţiuni care ar fi necesar pentru rezolvarea problemei cu metoda matricelor de transfer. Acesta este unul dintre avantajele metodei elementelor finite faţă de metoda matricelor de transfer. Modelarea cu elemente finite conduce la scrierea sistemului de ecuaţii dinamice generale. De asemenea, în modelarea cu elemente finite, pot fi uşor incorporate alte efecte, cum ar fi elasticitatea suportului lagărelor, amortizarea din lagăre, deformaţiile de forfecare, inerţia la rotaţie, efectul încărcării axiale, efectul amortizării interne vâscoase şi amortizarea histeretică.

La baza discretizării în elemente finite stau câteva reguli care folosesc la modelarea unui rotor de secţiune circulară, caracterizat prin elemente nedeformabile, fără lungime (masice) şi elemente deformabile (tronsoane de arbore):

- Rotorul se discretizează, de obicei, prin elemente de tip grindă;

- Fiecare element se leagă prin nodurile de la capete de elementele vecine;

- Elementele nedeformabile (masice) se concentrează în unul sau mai multe noduri corespunzătoare poziţiei elementului respectiv în raport cu unul din capetele rotorului, masele mai importante netrebuind să fie deplasate;

- În zonele cu variaţie mare de diametru, lungimea elementelor trebuie să fie relativ mică (discretizare fină);

- Pentru un arbore cu variaţii mici de diametru în lungul său, discretizarea este bine să fie cu atât mai fină cu cât lagărul este mai rigid, adică lungimea elementelor să fie cât mai mică în vecinătatea lagărelor rigide şi mai mare în vecinătatea lagărelor elastice;

- Discretizarea trebuie să fie omogenă. Cu alte cuvinte, dacă situaţia reală o permite, este bine, pe cât posibil, ca matricele de inerţie şi de rigiditate ale elementelor vecine să aibă elemente corespunzătoare de valori apropiate (de exemplu, un rotor de diametru constant este bine să fie discretizat în elemente de aceeaşi lungime);

- Concentrarea unui disc în unul sau mai multe noduri se face în funcţie de modul de asamblare al discului pe arbore şi de grosimea discului raportată la diametrul arborelui, astfel:
    - dacă discul este montat pe arbore prin intermediul unei pene sau prin caneluri (blocat cu inele de siguranţă), se poate considera că el nu modifică rigiditatea arborelui, efectele lui fiind concentrate în nodul corespunzător de pe arbore;

    - dacă discul este fixat pe arbore prin fretaj la cald, atunci se poate considera că discul a mărit rigiditatea arborelui, raza acestuia pe lungimea h (h=grosimea discului în zona de contact disc-arbore) fiind mărită cu h/2, efectul discului concentrându-se în nodul de la mijlocul grosimii acestuia;

    - dacă grosimea h a discului este mare, efectele discului pot fi concentrate în trei noduri distribuite pe grosimea acestuia.

Elementele finite de arbore cele mai des utilizate sunt elementele de bară cilindrice. În lucrarea de faţă s-au tratat îndeosebi elementele de bară tronconice.

3.1.1. Elementul cilindric de bară cu două noduri

Se consideră un segment de arbore de secţiune constantă, cu două noduri la capete, modelat printr-un element de bară Timoshenko (Fig.3.1).

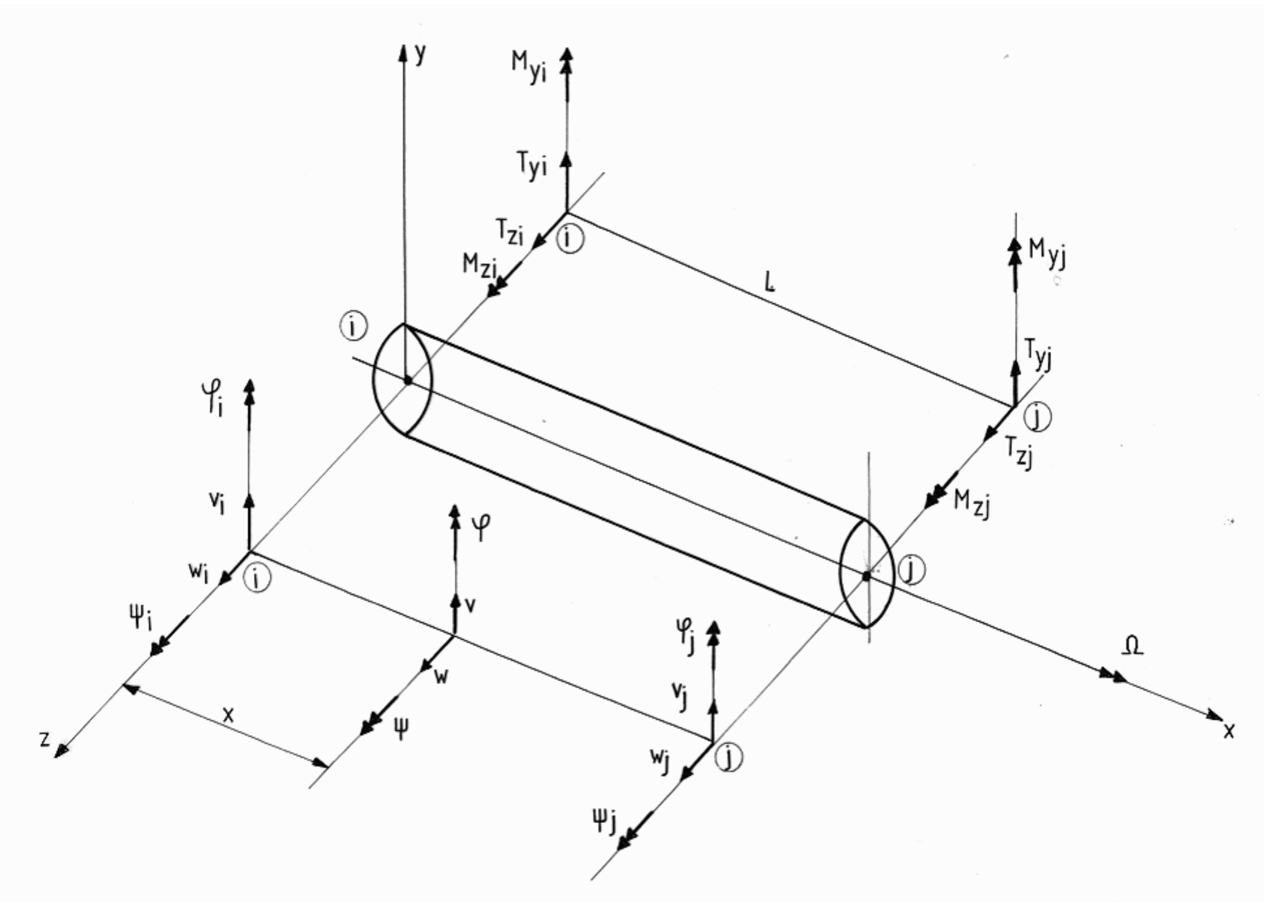


Fig.3.1

Pentru acest element se folosesc notaţiile:

- L - lungimea elementului de arbore;
- EI – modulul de rigiditate la încovoiere;
- GA_S – modulul de rigiditate la forfecare efectiv;
- A_S – aria de forfecare redusă;
- χ – factorul de forfecare;
- μ – masa pe unitatea de lungime, $\mu = \rho A$;
- $\hat{\mu}$ - masa de rotaţie pe unitatea de lungime, $\hat{\mu} = \rho \mathbf{I}$;
- ρ - densitatea materialului arborelui;
- E – modulul de elasticitate longitudinal;

- G – modulul de elasticitate transversal;
- I – momentul de inerţie axial al secţiunii transversale.

Se definesc doi subvectori ai deplasărilor nodale de ordin 4x1, ce cuprind câte două deplasări liniare şi câte două rotiri în planele X-Y şi X-Z:

$$\left\{\mathbf{u}_y^S\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{v_i} \\ \psi_\mathbf{i} \\ \mathbf{v_j} \\ \psi_\mathbf{j} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\mathbf{u}_z^S\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{w_i} \\ -\varphi_\mathbf{i} \\ \mathbf{w_j} \\ -\varphi_\mathbf{j} \end{matrix}\right\}. \qquad (3.3)$$

Se definesc, de asemenea, vectorii corespunzători forţelor nodale:

$$\left\{\mathbf{f}_y^S\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{T_{yi}} \\ \mathbf{M_{zi}} \\ \mathbf{T_{yj}} \\ \mathbf{M_{zj}} \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\mathbf{f}_z^S\right\} = \left\{\begin{matrix} \mathbf{T_{zi}} \\ -\mathbf{M_{yi}} \\ \mathbf{T_{zj}} \\ -\mathbf{M_{yj}} \end{matrix}\right\}. \qquad (3.4)$$

De remarcat semnul minus al rotirilor şi momentelor faţă de axa y.

Regula de semn folosită aici este aceea că forţele interioare sunt pozitive dacă acţionează în sensul pozitiv al axelor de coordonate într-o secţiune a barei având normala (exterioară) pozitivă, respectiv, forţele interioare sunt pozitive dacă acţionează în sensul negativ al axelor de coordonate într-o secţiune a barei având normala (exterioară) negativă.

3.1.1.1. Elementul Bernoulli-Euler

Elementul cilindric de arbore Bernoulli-Euler este un element finit cu două noduri la capete, având fiecare câte patru grade de libertate: două translaţii şi două rotaţii. În teoria de bară Bernoulli-Euler se neglijează deformaţiile datorită forfecării şi inerţia la rotaţie. Se ţine cont de încovoierea barei.

Ecuaţia de mişcare în planul x-y

Fie un element de bară de lungime dx, situat în planul x-y, izolat dintr-un arbore (Fig.3.2).

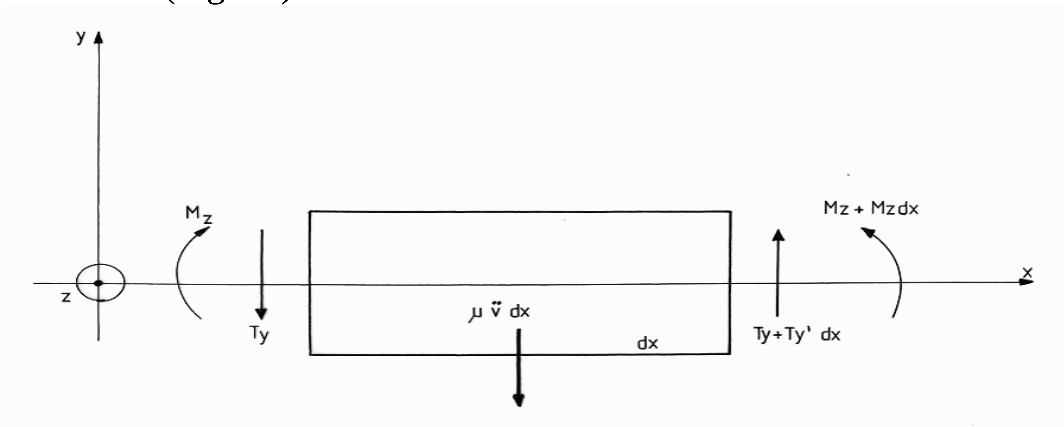


Fig.3.2

a. Ecuaţiile de echilibru

$$\begin{cases} \left(\sum \mathbf{M}_{z(2)} = 0\right) & \mathbf{M}_z - \mathbf{T}_y \cdot \mathbf{dx} - \underbrace{\mu\ddot{\mathbf{v}}\mathbf{dx} \cdot \frac{\mathbf{dx}}{2}}_{\cong 0} - \left(\mathbf{M}_z + \mathbf{M}_z{}'\mathbf{dx}\right) = 0 \\ \left(\sum \mathbf{F}_y = 0\right) & \mathbf{T}_y - \left(\mathbf{T}_y + \mathbf{T}_y{}'\mathbf{dx}\right) + \mu\ddot{\mathbf{v}}\mathbf{dx} = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

unde

$$\mu = \rho \mathbf{A}\,;\ \ddot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{d}^2\mathbf{v}}{\mathbf{dt}^2} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{M}_z{}' = \frac{\partial \mathbf{M}_z}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T}_y{}' = \frac{\partial \mathbf{T}_y}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.8)$$

iar după simplificări rezultă:

$$\begin{cases} \mathbf{M_z}' + \mathbf{T_y} = \mathbf{0} \\ -\mathbf{T_y}' + \mu\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \end{cases} \qquad (3.9)$$

b. Ecuaţia deformatei elastice

$$\mathbf{M_z} = \mathbf{EI_z} \cdot \aleph_{xy} \qquad (3.10)$$

unde $\aleph_{xy}$ reprezintă inversul razei de curbură a fibrei medii deformate, adică rotirea specifică, sau, cu alte cuvinte, unghiul cu care se rotesc, una faţă de alta, în jurul axei z, două secţiuni situate la o distanţă egală cu unitatea, adică:

$$\aleph_{xy} = \frac{d\psi}{dx} = \psi' \qquad (3.11)$$

c. Relaţii cinematice

Ţinând cont de figura 3.3 se poate scrie:

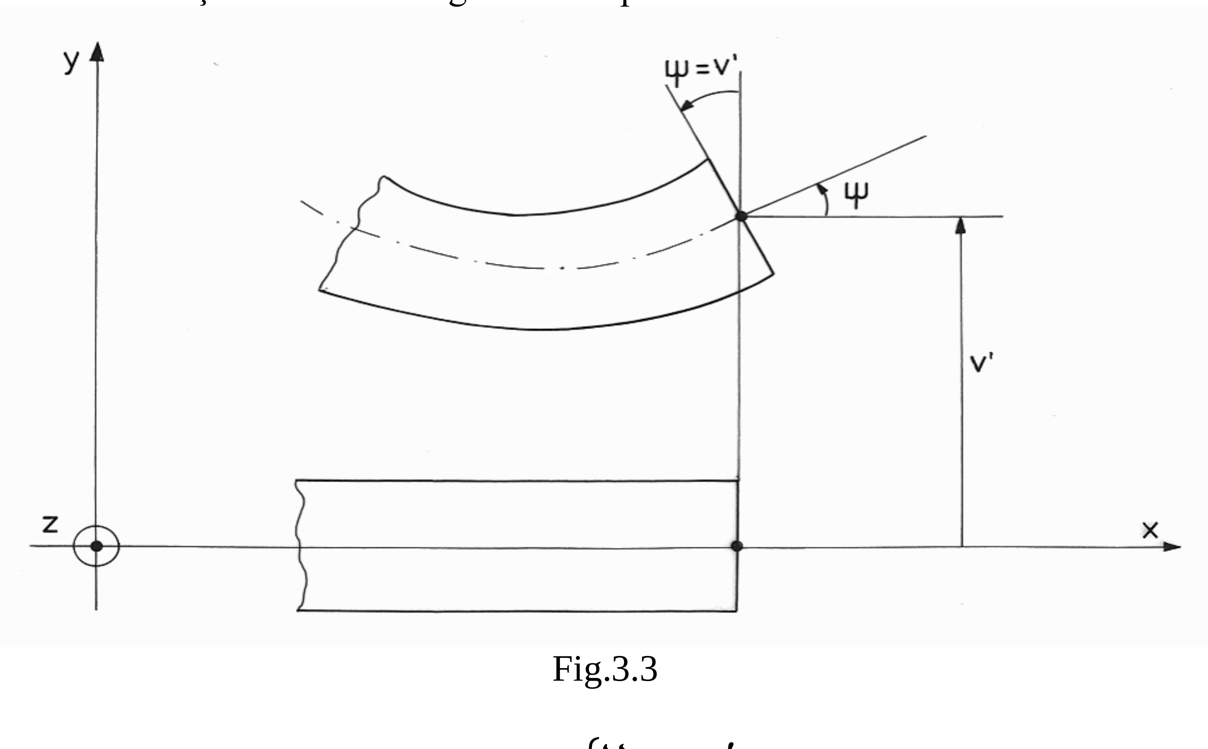


Fig.3.3

$$\begin{cases} \aleph_{xy} = \psi' \\ \psi = \mathbf{v}' \end{cases} \qquad (3.12)$$

sau

$$\begin{cases} \aleph_{xy} = \psi' \\ 0 = \psi - v' \end{cases} \tag{3.13}$$

d. Ecuaţia de mişcare

Introducând (3.13) în (3.10) se obţine:

$$M_z = EI_z \psi' = EI_z v'' \tag{3.14}$$

deci

$$M_z = EI_z v'' \tag{3.15}$$

Derivând prima ecuaţie din relaţia (3.9) în raport cu x se obţine:

$$M_z'' + T_y' = 0 \tag{3.16}$$

dar tot din relaţia (3.9) rezultă:

$$T_y' = \mu \ddot{v} \tag{3.17}$$

adică

$$M_z'' + \mu \ddot{v} = 0 \tag{3.18}$$

Derivând (3.15) de două ori în raport cu x se obţine:

$$M_z'' = EI_z v^{IV} \tag{3.19}$$

Introducând (3.19) în (3.18) se obţine ecuaţia de mişcare pentru elementul Bernoulli-Euler în planul x-y:

$$EI_z v^{IV} + \mu \ddot{v} = 0 \tag{3.20}$$

Un calcul asemănător pentru stabilirea ecuaţiei de mişcare se face şi în planul x-z, de unde rezultă următoarele:

Ecuaţia de mişcare în planul x-z

Fie un element de bară de lungime dx, situat în planul x-z, izolat dintr-un arbore (Fig.3.4).

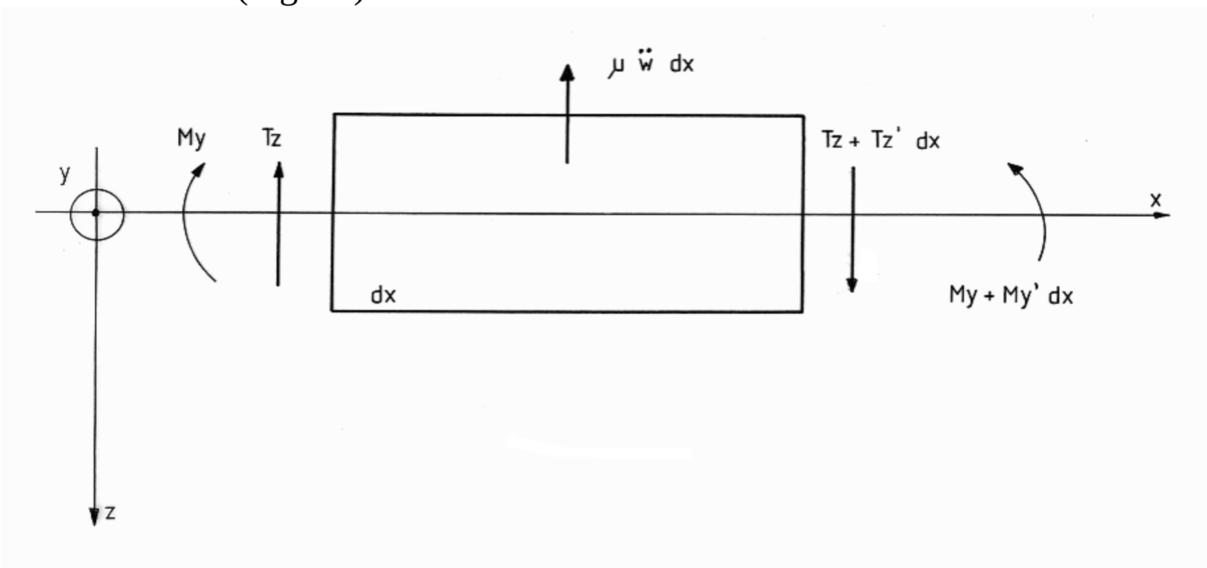


Fig.3.4

a. Ecuaţiile de echilibru

$$\begin{cases} \left(\sum M_{y(2)} = 0\right) & M_y + T_z \cdot dx + \underbrace{\mu \ddot{w} dx \frac{dx}{2}}_{\cong 0} - \left(M_y + M_y{}' dx\right) = 0 \\ \left(\sum F_z = 0\right) & T_z + \mu \ddot{w} dx - \left(T_z + T_z{}' dx\right) = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

unde

$$\mu = \rho A; \quad \ddot{w} = \frac{d^2 w}{dt^2} \tag{3.22}$$

$$M_y{}' = \frac{\partial M_y}{\partial x} \tag{3.23}$$

$$T_z{}' = \frac{\partial T_z}{\partial x} \tag{3.24}$$

iar după simplificări rezultă:

$$\begin{cases} M_y{}' - T_z = 0 \\ T_z{}' - \mu \ddot{w} - 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

b. Ecuaţia deformatei elastice

$$\mathbf{M_y = EI_y \cdot \aleph_{xz}} \tag{3.26}$$

unde $\aleph_{xz}$ reprezintă rotirea specifică, adică, unghiul cu care se rotesc, una faţă de alta, în jurul axei y, două secţiuni situate la o distanţă egală cu unitatea, adică:

$$\mathbf{\aleph_{xz} = \frac{d\varphi}{dx} = \varphi'} \tag{3.27}$$

c. Relaţii cinematice

Ţinând cont de figura 3.5 se poate scrie:

$$\begin{cases} \aleph_{xz} = \varphi' \\ \varphi = -w' \end{cases} \tag{3.28}$$

sau

$$\begin{cases} \aleph_{xz} = \varphi' \\ 0 = \varphi + w' \end{cases} \tag{3.29}$$

d. Ecuaţia de mişcare

Introducând (3.29) în (3.26) se obţine:

$$\mathbf{M_y = EI_y\varphi' = -EI_y w''} \tag{3.30}$$

deci

$$\mathbf{M_y = -EI_y w''} \tag{3.31}$$

Derivând prima ecuaţie din relaţia (3.25) în raport cu x se obţine:

$$\mathbf{M_y}'' - \mathbf{T_z}' = \mathbf{0} \qquad (3.32)$$

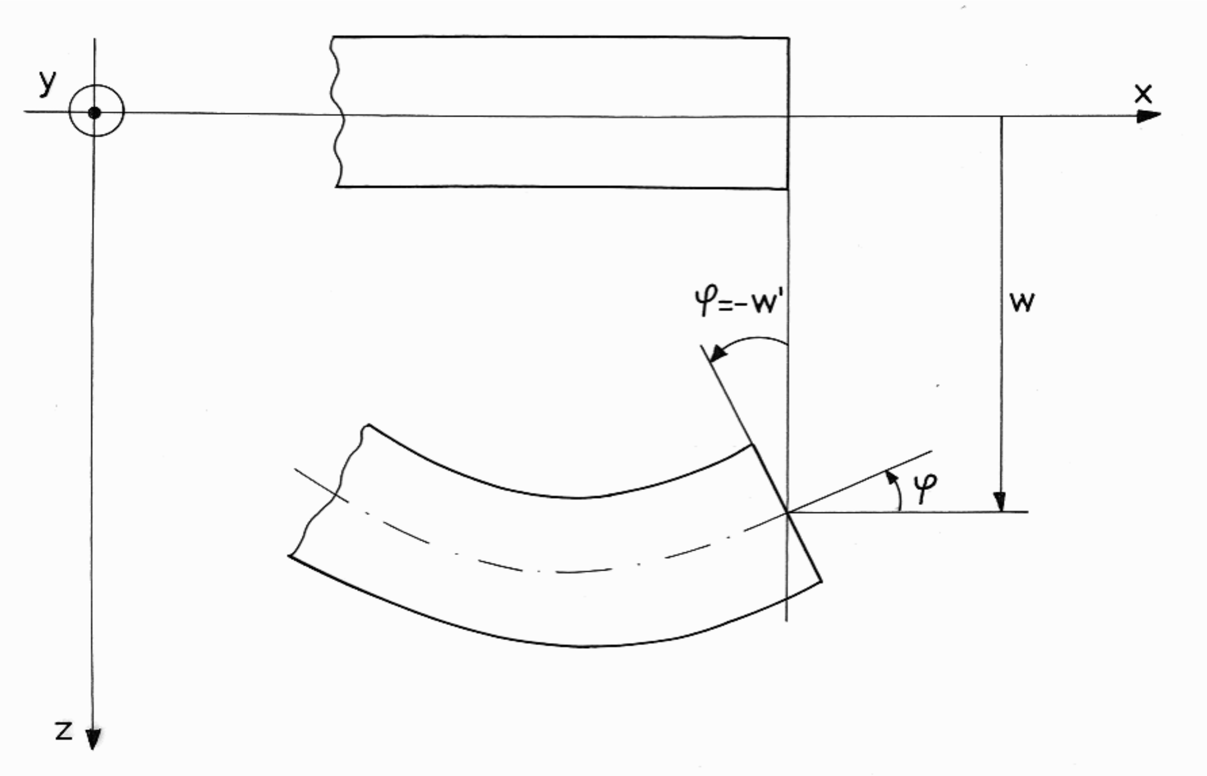


Fig.3.5

dar tot din (3.25)

$$\mathbf{T_z}' = \mu\ddot{\mathbf{w}} \qquad (3.33)$$

adică

$$\mathbf{M_y}'' - \mu\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \qquad (3.34)$$

Derivând (3.31) de două ori în raport cu x se obţine:

$$\mathbf{M_y}'' = -\mathbf{EI_y w^{IV}} \qquad (3.35)$$

Introducând (3.35) în (3.34) se obţine ecuaţia de mişcare pentru elementul Bernoulli-Euler în planul x-z:

$$\mathbf{EI_y w^{IV}} + \mu\ddot{\mathbf{w}} = \mathbf{0} \qquad (3.36)$$

Funcţii de formă pentru elementul Bernoulli-Euler în planul x-y

Pentru aproximarea deplasărilor şi rotirilor elementului, se introduce coordonata adimensională ξ de forma $\xi = \frac{x}{L}$ şi se folosesc funcţii polinomiale de gradul trei de forma:

$$\begin{cases} v(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0 \\ \psi(\xi) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 \end{cases} \tag{3.37}$$

Dar din (3.12) rezultă:

$$\psi = v' = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L}\frac{dv}{d\xi}$$

Deci

$$\frac{1}{L}\frac{dv}{d\xi} = \psi \tag{3.38}$$

Dar

$$\frac{dv}{dx} = 3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1 \tag{3.39}$$

Rezultă că:

$$\frac{1}{L}\left(3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1\right) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 \tag{3.40}$$

Ordonând în membrul drept şi în membrul stâng după puterile lui ξ, rezultă:

$$\frac{3A_3}{L}\xi^2 + \frac{2A_2}{L}\xi + \frac{A_1}{L} = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 \tag{3.41}$$

iar prin identificare se obţine:

$$\begin{cases} B_3 = 0 \\ \frac{3A_3}{L} = B_2 \\ \frac{2A_2}{L} = B_1 \\ \frac{A_1}{L} = B_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_3 = 0 \\ B_2 = \frac{3}{L}A_3 \\ B_1 = \frac{2}{L}A_2 \\ B_0 = \frac{1}{L}A_1 \end{cases} \tag{3.42}$$

astfel, pentru că $B_3 = 0$, funcţia $\psi(\xi)$ este de gradul doi:

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 = \\ &= \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Deplasarea liniară v şi rotirea ψ se aproximează în funcţie de deplasările nodale, cu ajutorul funcţiilor de formă statice N, în felul următor:

$$\begin{cases} v(\xi) = N_1(\xi)v_i + N_2(\xi)\psi_i + N_3(\xi)v_j + N_4(\xi)\psi_j = \lfloor N \rfloor \{u_y{}^s\} \\ \psi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)v_i + \tilde{N}_2(\xi)\psi_i + \tilde{N}_3(\xi)v_j + \tilde{N}_4(\xi)\psi_j = \lfloor \tilde{N} \rfloor \{u_y{}^s\} \end{cases} \tag{3.44}$$

unde s-a folosit notaţia (3.3) şi în plus

$$\begin{aligned} \lfloor N \rfloor &= \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \\ \lfloor \tilde{N} \rfloor &= \lfloor \tilde{N}_1 \quad \tilde{N}_2 \quad \tilde{N}_3 \quad \tilde{N}_4 \rfloor \end{aligned} \tag{3.45}$$

Calculul funcţiilor de formă

Funcţiile de formă au următoarele proprietăţi importante:

1. Suma funcţiilor de formă are valoarea egală cu 1 în orice nod;
2. Corespunzător coordonatei n, funcţia de formă N_n=1, iar celelalte funcţii de formă au valori nule.

Pentru $v_i = v(x = 0) = v(\xi = 0) \rightarrow N_1(\xi) = 1; \tilde{N}_1(\xi) = 1;$

Pentru $\psi_i = \psi(x = 0) = \psi(\xi = 0) \rightarrow N_2(\xi) = 1; \tilde{N}_2(\xi) = 1;$

Pentru $v_j = v(x = L) = v(\xi = 1) \rightarrow N_3(\xi) = 1; \tilde{N}_3(\xi) = 1;$

Pentru $\psi_j = \psi(x = L) = \psi(\xi = 1) \rightarrow N_4(\xi) = 1; \tilde{N}_4(\xi) = 1.$

Calculul funcţiilor de formă este prezentat pe larg în **Anexa 1**.

Funcţii de formă pentru elementul Bernoulli-Euler în planul x-z

Pentru aproximarea deplasărilor şi rotirilor elementului de bară în acest plan, se folosesc tot funcţii polinomiale de gradul trei de forma:

$$\begin{cases} \mathbf{w(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0} \\ \mathbf{-\varphi(\xi) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0} \end{cases} \tag{3.46}$$

Din relaţia (3.28) se poate scrie:

$$\mathbf{\frac{dw}{dx} = -\varphi}$$

şi folosind în continuare coordonata adimensională ξ este valabilă relaţia:

$$\mathbf{\frac{1}{L}\frac{dw}{d\xi} = -\varphi} \tag{3.47}$$

Dar

$$\mathbf{\frac{dw}{dx} = 3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1} \tag{3.48}$$

Rezultă că:

$$\mathbf{\frac{1}{L}\left(3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1\right) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0} \tag{3.49}$$

Ordonând şi în membrul drept şi în membrul stâng după puterile lui ξ, rezultă:

$$\mathbf{\frac{3A_3}{L}\xi^2 + \frac{2A_2}{L}\xi + \frac{A_1}{L} = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0} \tag{3.50}$$

iar prin identificare se obţine:

$$\begin{cases} \mathbf{B_3 = 0} \\ \dfrac{\mathbf{3A_3}}{\mathbf{L}} = \mathbf{B_2} \\ \dfrac{\mathbf{2A_2}}{\mathbf{L}} = \mathbf{B_1} \\ \dfrac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{L}} = \mathbf{B_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B_3 = 0} \\ \mathbf{B_2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_3} \\ \mathbf{B_1} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_2} \\ \mathbf{B_0} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_1} \end{cases} \tag{3.51}$$

astfel, pentru că $\mathbf{B_3 = 0}$, şi funcţia $[\ -\varphi(\xi)\ ]$ este de gradul doi:

$$\begin{aligned} -\varphi(\xi) &= \mathbf{B_2}\xi^2 + \mathbf{B_1}\xi + \mathbf{B_0} = \\ &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_3}\xi^2 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_2}\xi + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_1}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Deplasarea liniară $\mathbf{w}$ şi rotirea φ se aproximează în funcţie de deplasările nodale, cu ajutorul funcţiilor de formă statice N, în felul următor:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{N_1}(\xi)\mathbf{w_i} - \mathbf{N_2}(\xi)\varphi_i + \mathbf{N_3}(\xi)\mathbf{w_j} - \mathbf{N_4}(\xi)\varphi_j = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \{\mathbf{u_y}^s\} \\ -\varphi(\xi) = \tilde{\mathbf{N}}_1(\xi)\mathbf{w_i} - \tilde{\mathbf{N}}_2(\xi)\varphi_i + \tilde{\mathbf{N}}_3(\xi)\mathbf{w_j} - \tilde{\mathbf{N}}_4(\xi)\varphi_j = \lfloor \tilde{\mathbf{N}} \rfloor \{\mathbf{u_y}^s\} \end{cases} \tag{3.53}$$

Calculul funcţiilor de formă

Folosind proprietăţile funcţiilor de formă, se calculează expresiile acestora şi în planul x-z.

Calculul funcţiilor de formă este prezentat pe larg în **Anexa 1**, în urma căruia s-au obţinut:

Funcţii de formă pentru deplasări liniare, valabile atât în planul x-y cât şi în planul x-z sunt:

$$\begin{cases} \mathbf{N_1}(\xi) = \mathbf{1} - \mathbf{3}\xi^2 + \mathbf{2}\xi^3 \\ \mathbf{N_2}(\xi) = \mathbf{L}(\xi - \mathbf{2}\xi^2 + \xi^3) \\ \mathbf{N_3}(\xi) = \mathbf{3}\xi^2 - \mathbf{2}\xi^3 \\ \mathbf{N_4}(\xi) = \mathbf{L}(-\xi^2 + \xi^3) \end{cases} \tag{3.54}$$

Funcţiile de formă pentru rotiri, notate $\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{i}}(\xi)$ în planul x-y, diferă doar prin semnul „minus” de funcţiile de formă pentru rotiri din planul x-z notate $\tilde{\mathbf{N}}_{\mathbf{i\varphi}}(\xi)$.

Funcţii de formă pentru rotiri în planul x-z sunt:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}_{1\varphi}(\xi) = -\left[\frac{1}{\mathbf{L}}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)\right] = -\tilde{\mathbf{N}}_1(\xi), \\ \tilde{\mathbf{N}}_{2\varphi}(\xi) = -\left[3\xi^2 - 4\xi + 1\right] = -\tilde{\mathbf{N}}_2(\xi), \\ \tilde{\mathbf{N}}_{3\varphi}(\xi) = -\left[\frac{1}{\mathbf{L}}\left(-6\xi^2 + 6\xi\right)\right] = -\tilde{\mathbf{N}}_3(\xi), \\ \tilde{\mathbf{N}}_{4\varphi}(\xi) = -\left[3\xi^2 - 2\xi\right] = -\tilde{\mathbf{N}}_4(\xi). \end{cases} \tag{3.55}$$

Deci

$$\lfloor \tilde{\mathbf{N}}_{\varphi} \rfloor = -\lfloor \tilde{\mathbf{N}} \rfloor \tag{3.56}$$

3.1.1.2. Elementul Timoshenko

Elementul cilindric de arbore Timoshenko are două noduri la capete, având fiecare câte patru grade de libertate: două translaţii şi două rotaţii.

Teoria de bară Timoshenko se bazează pe următoarele ipoteze:

a) Ipoteza secţiunilor plane (a lui Bernoulli): o secţiune plană şi normală la axa barei înainte de deformare rămâne plană şi după deformarea barei;
b) Deplanarea secţiunii transversale se neglijează;
c) Se consideră o tensiune de forfecare medie, independentă de y.

Ipoteza secţiunilor plane introduce rigidităţi false relativ la forfecare. Astfel, deformaţiile de forfecare sunt subestimate şi de aceea relaţia pentru forţa tăietoare T nu este corectă. Atunci, soluţia este folosirea în calcule a unei „arii efective de forfecare” mai mică decât aria reală a secţiunii, $A_S<A$. Din considerente energetice, se poate scrie:

$$\frac{1}{2}\int_L\left(\int_A \frac{\tau^2}{G}\,dA\right)dx = \frac{1}{2}\int_L \frac{T^2}{GA_S}\,dx \tag{3.57}$$

unde

$$A_S = \frac{\left[\int \tau\, dA\right]^2}{\int \tau^2\, dA} = \chi A \tag{3.58}$$

Pentru bara de secţiune inelară, având raza interioară r şi raza exterioară R factorul χ are următoarea expresie [34]:

$$\chi = \frac{1}{\dfrac{7+6\nu}{6+6\nu} + \dfrac{20+12\nu}{6+6\nu}\left(\dfrac{r/R}{1+(r/R)^2}\right)^2} \tag{3.59}$$

În această expresie ν reprezintă coeficientul de contracţie transversală (coeficientul lui Poisson). Pentru oţel el are valoarea $\nu = 0.3$, atunci χ pentru bara de oţel, de secţiune inelară are următoarea expresie [34]:

$$\chi = \frac{1}{1.13 + 3.03\left(\dfrac{r/R}{1+(r/R)^2}\right)^2} \tag{3.60}$$

Ecuaţiile de mişcare în planul x-y

Fie un element de bară de lungime dx, situat în planul x-y, izolat dintr-un arbore (Fig.3.6). Asupra acestui element acţionează, în plus faţă de elementul Bernoulli-Euler, cuplul de inerţie la rotaţie $\hat{\mu}\cdot\ddot{\psi}\cdot\mathbf{dx}$.

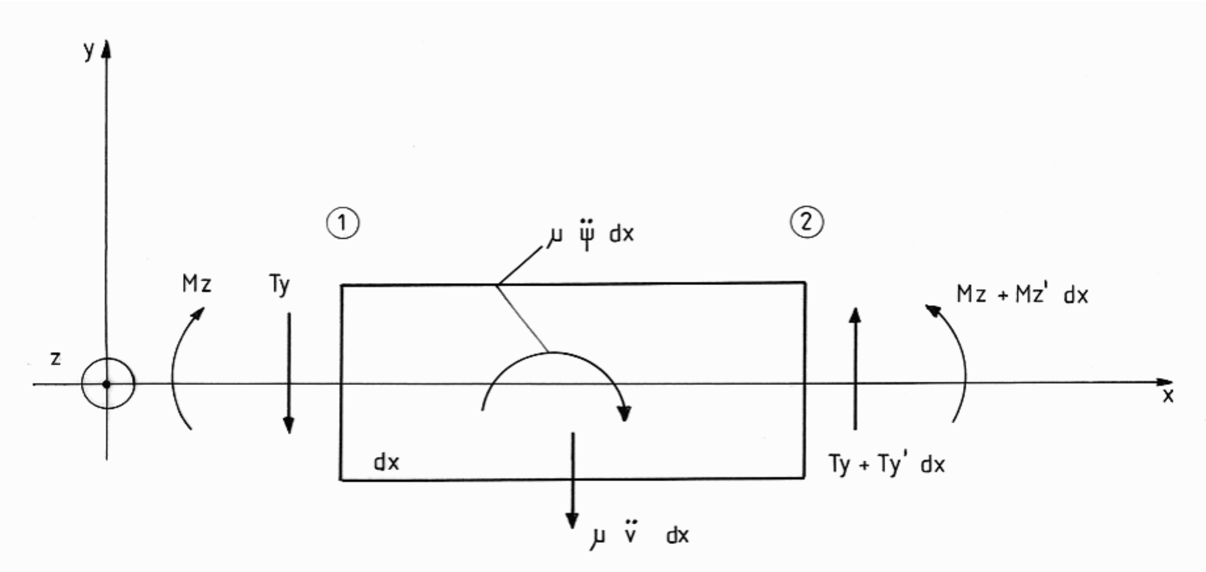


Fig.3.6

a. Ecuaţii de echilibru

$$\begin{cases} \left(\sum M_{z(2)}=0\right) & M_z - T_y dx - \underbrace{\mu\ddot{v}dx\frac{dx}{2}}_{\cong 0} + \hat{\mu}\ddot{\psi}dx - \left(M_z + M_z{}' dx\right) = 0 \\ \left(\sum F_y = 0\right) & T_y + \mu\ddot{v}dx - \left(T_y + T_y{}' dx\right) = 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

unde

$$\hat{\mu} = \rho I \quad (3.62)$$

$$\ddot{\psi} = \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad (3.63)$$

iar după simplificări rezultă:

$$\begin{cases} M_z{}' + T_y - \hat{\mu}\ddot{\psi} = 0 \\ -T_y{}' + \mu\ddot{v} = 0 \end{cases} \quad (3.64)$$

b. Ecuaţiile deformatei elastice

$$\begin{cases} \mathbf{M_z = EI_z \aleph_{xy}} \\ \mathbf{T_y = GA_S \gamma_{xy}} \end{cases} \tag{3.65}$$

unde $\boldsymbol{\gamma_{xy}}$ reprezintă lunecarea specifică în planul x-y, de forma:

$$\boldsymbol{\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}} \tag{3.66}$$

c. Relaţii cinematice

Ţinând cont de figura 3.7 se poate scrie:

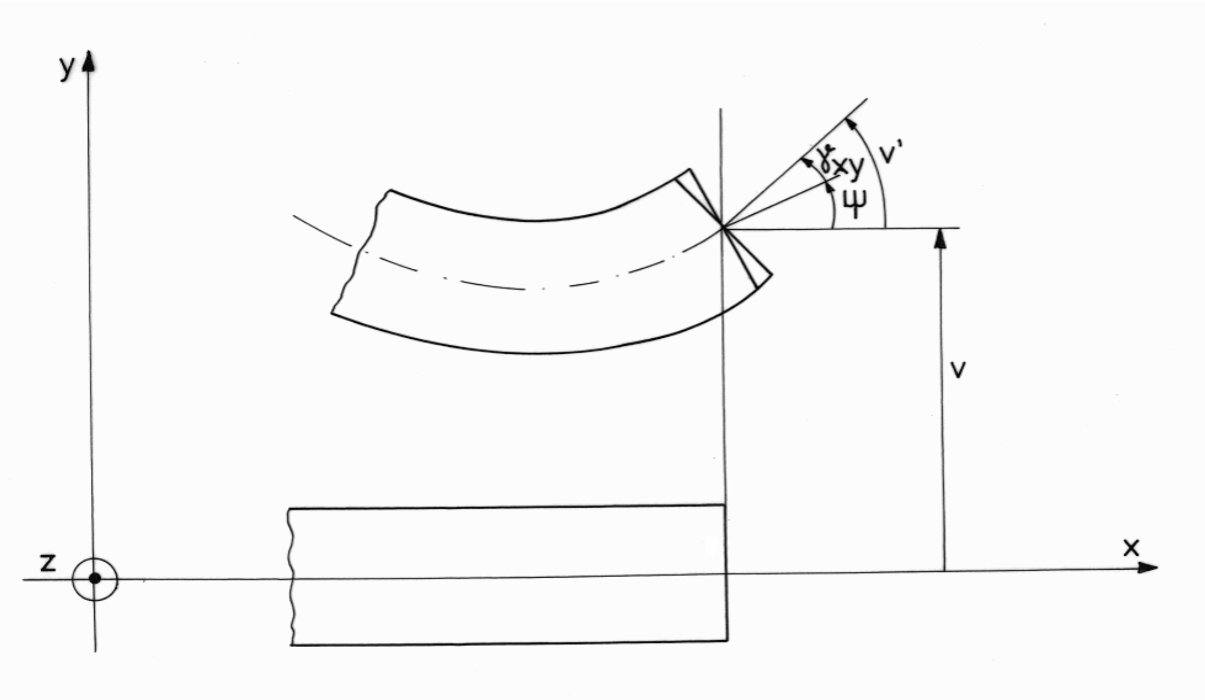


Fig.3.7

$$\begin{cases} \mathbf{\aleph_{xy} = \psi'} \\ \mathbf{\gamma_{xy} = v' - \psi} \end{cases} \tag{3.67}$$

d. Ecuaţiile de mişcare

Introducând (3.67) în (3.65) se obţine:

$$\begin{cases} \mathbf{M_z = EI_z \psi'} \\ \mathbf{T_y = GA_S (v' - \psi)} \end{cases} \tag{3.68}$$

Derivând relaţia (3.68), o dată, în raport cu x , rezultă:

$$\begin{cases} \mathbf{M_z}' = \mathbf{EI_z\psi''} \\ \mathbf{T_y}' = \mathbf{GA_S(v'' - \psi')} \end{cases} \tag{3.69}$$

Relaţia (3.69) se introduce în (3.64), de unde se obţine:

$$\begin{cases} \mathbf{EI_z\psi'' + GA_S(v' - \psi) + \hat{\mu}\ddot{\psi} = 0} \\ \mathbf{-GA_S(v'' - \psi') + \mu\ddot{v} = 0} \end{cases} \tag{3.70}$$

sau, altfel scris, se obţin ecuaţiile de mişcare:

$$\begin{cases} \mathbf{EI_z\psi'' - GA_S(\psi - v') + \hat{\mu}\ddot{\psi} = 0} \\ \mathbf{GA_S(\psi' - v'') + \mu\ddot{v} = 0.} \end{cases} \tag{3.71}$$

Într-adevăr, deplasările axiale

$$\mathbf{u = -\psi \cdot y} \tag{3.72}$$

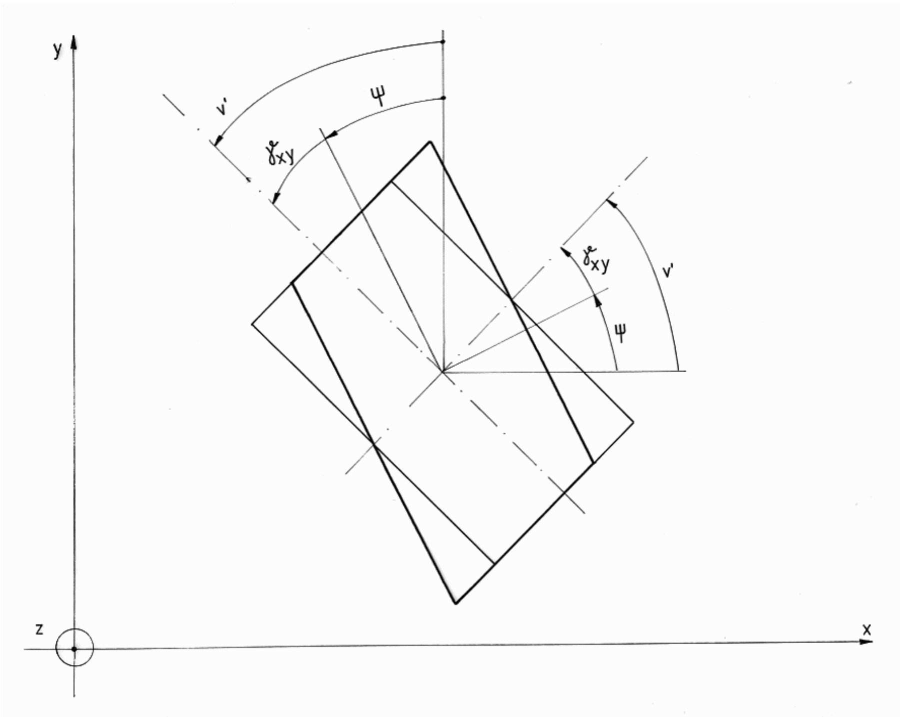


Fig.3.8

Atunci, lunecarea specifică

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(-\psi \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = -\psi + \mathbf{v}' \tag{3.73}$$

Rezultă şi relaţiile:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-\psi y)}{\partial x} = -y \cdot \psi' \tag{3.74}$$

$$M_z = -\int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA \tag{3.75}$$

$$M_z = EI_z \psi'$$

Neglijând termenul $\hat{\mu}\ddot{\psi}$ în relaţia (3.71), aceasta devine:

$$EI_z \psi'' - GA_S(\psi - v') = 0 \tag{3.76}$$

sau

$$\psi - v' = \frac{EI_z}{GA_S}\psi'' \tag{3.77}$$

adică

$$v' = \psi - \frac{EI_z}{GA_S}\psi'' \tag{3.78}$$

Aceasta introduce o relaţie statică (aproximativă) între v' şi ψ, (de fapt mărimi cinematice independente) care permite simplificarea calculelor ulterioare. Ea reprezintă principala aproximaţie introdusă în formularea elementelor finite de tip Timoshenko.

Se poate introduce o coordonată adimensională ξ şi se poate exprima ecuaţia de mişcare în funcţie de aceasta:

$$\xi = \frac{x}{L} \tag{3.79}$$

Atunci

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \frac{d}{d\xi} \tag{3.80}$$

Deci

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \frac{dv}{d\xi} \tag{3.81}$$

$$\psi' = \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{L} \cdot \frac{d\psi}{d\xi} \tag{3.82}$$

$$\psi'' = \frac{d\psi'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L} \cdot \frac{d\psi}{d\xi}\right) = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{1}{L^2} \cdot \frac{d^2\psi}{d\xi^2} \tag{3.83}$$

Introducând (3.81) şi (3.83) în (3.78) se obţine:

$$\frac{1}{L}\frac{dv}{d\xi} = \psi - \frac{EI_z}{GA_S}\frac{1}{L^2}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \tag{3.84}$$

Notând

$$K = 12\frac{EI_z}{GA_S L^2} \tag{3.85}$$

Ecuaţia (3.78) pentru elementul Timoshenko în coordonate adimensionale corespunzătoare planului x-y este:

$$\frac{1}{L}\frac{dv}{d\xi} = \psi - \frac{K}{12}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} \tag{3.86}$$

<u>Ecuaţiile de mişcare în planul x-z</u>

Fie un element de bară de lungime dx, situat în planul x-z, izolat dintr-un arbore (Fig.3.9). Asupra acestui element acţionează, în plus faţă de elementul Bernoulli-Euler, cuplul de inerţie la rotaţie $\hat{\mu} \cdot \ddot{\varphi} \cdot dx$.

a. Ecuaţii de echilibru

Pentru elementul de bară izolat se scriu sumă de momente încovoietoare faţă de axa y şi sumă de forţe tăietoare paralele cu axa z .

$$\begin{cases} \left(\sum M_{y(2)}=0\right) & M_y+T_z dx-\underbrace{\mu\ddot{w}dx\frac{dx}{2}}_{\cong 0}+\hat{\mu}\ddot{\varphi}dx-\left(M_y+M_y{}'dx\right)=0 \\ \left(\sum F_z=0\right) & T_z+\mu\ddot{w}dx-\left(T_z+T_z{}'dx\right)=0 \end{cases} \tag{3.87}$$

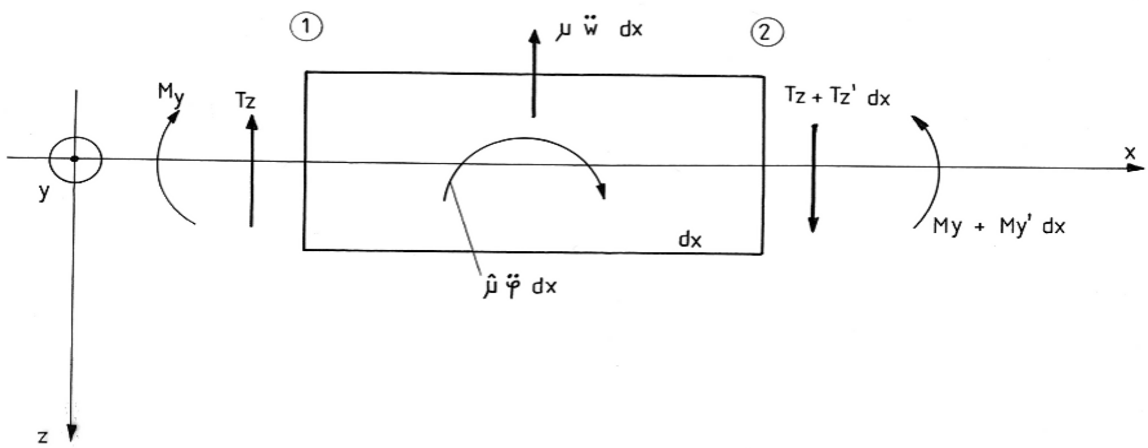


Fig.3.9

unde

$$\hat{\mu}=\rho I$$
$$\ddot{\varphi}=\frac{d^2\varphi}{dt^2} \tag{3.88}$$

iar după simplificări rezultă:

$$\begin{cases} M_y{}'-T_z-\hat{\mu}\ddot{\varphi}=0 \\ T_z{}'+\mu\ddot{w}=0 \end{cases} \tag{3.89}$$

b. Ecuaţiile deformatei elastice

$$\begin{cases} M_y=EI_y\aleph_{xz} \\ T_z=GA_S\gamma_{xz} \end{cases} \tag{3.90}$$

unde γ_{xz} reprezintă lunecarea specifică în planul x-z, de forma:

$$\gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.91}$$

c. Relaţii cinematice

Ţinând cont de figura 3.10 se poate scrie:

$$\begin{cases} \aleph_{xz} = \varphi' \\ \gamma_{xz} = \varphi + w' \end{cases} \tag{3.92}$$

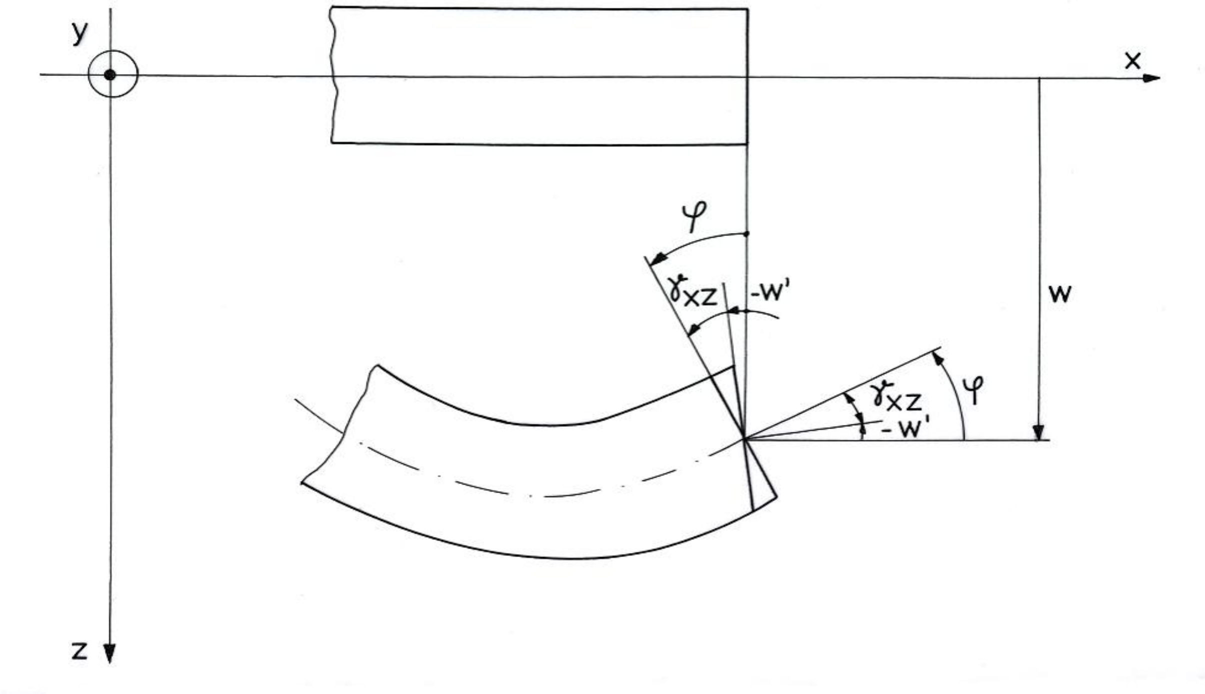


Fig.3.10

d. Ecuaţiile de mişcare

Introducând (3.92) în (3.90) se obţine:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_y = \mathbf{EI}_y \varphi' \\ \mathbf{T}_z = \mathbf{GA}_S(\varphi + \mathbf{w}') \end{cases} \tag{3.93}$$

Derivând relaţia (3.93) o dată în raport cu x, rezultă:

$$\begin{cases} \mathbf{M}_y{}' = \mathbf{EI}_y \varphi'' \\ \mathbf{T}_z{}' = \mathbf{GA}_S(\varphi' + \mathbf{v}'') \end{cases} \tag{3.94}$$

Relaţia (3.94) se introduce în (3.89), de unde se obţine:

$$\begin{cases} \mathbf{EI_y\varphi'' - GA_S(\varphi + w') - \hat{\mu}\ddot{\varphi} = 0} \\ \mathbf{GA_S(\varphi' + w'') - \mu\ddot{w} = 0.} \end{cases} \tag{3.95}$$

În ecuaţiile (3.87) - (3.95) s-au folosit următoarele relaţii:

$$\mathbf{u = \varphi \cdot z} \tag{3.96}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi z)}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi + w' \tag{3.97}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(\varphi z)}{\partial x} = z \cdot \varphi' \tag{3.98}$$

$$M_y = \int_A \sigma_x \cdot z \cdot dA \tag{3.99}$$

$$M_y = EI_y\varphi'$$

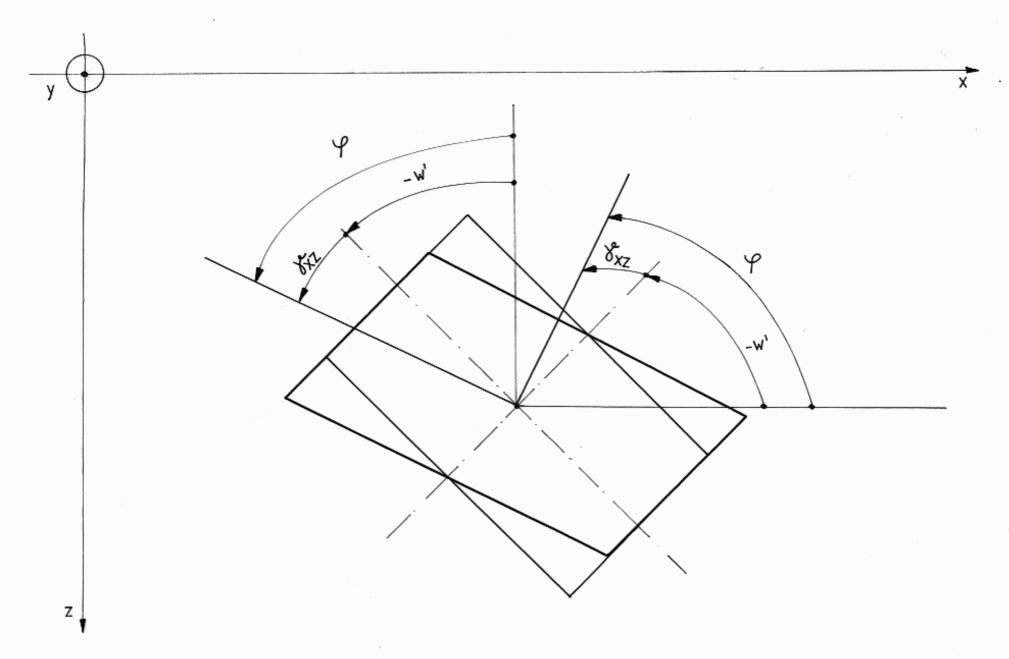


Fig.3.11

Neglijând termenul $\hat{\mu}\ddot{\varphi}$ în relaţia (3.95) aceasta devine:

$$\mathbf{EI_y\varphi'' - GA_S(\varphi + w') = 0} \tag{3.100}$$

sau

$$\varphi + w' = \frac{EI_y}{GA_S}\varphi'' \tag{3.101}$$

adică

$$w' = -\varphi + \frac{EI_z}{GA_S}\psi'' \tag{3.102}$$

sau

$$w' = (-\varphi) - \frac{EI_y}{GA_S}(-\varphi)'' \tag{3.103}$$

Utilizând coordonata adimensională $\xi = \frac{x}{L}$ se poate exprima ecuaţia (3.103) în funcţie de aceasta. Atunci, din relaţia (3.80)

$$w' = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{L}\cdot\frac{dw}{d\xi} \tag{3.104}$$

$$(-\varphi)' = \frac{d(-\varphi)}{dx} = \frac{1}{L}\cdot\frac{d(-\varphi)}{d\xi} \tag{3.105}$$

$$(-\varphi)'' = \frac{d(-\varphi)'}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{L}\cdot\frac{d(-\varphi)}{d\xi}\right) = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{L}\cdot\frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2} = \frac{1}{L^2}\cdot\frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2} \tag{3.106}$$

Introducând (3.104) şi (3.106) în (3.103) se obţine:

$$\frac{1}{L}\frac{dw}{d\xi} = (-\varphi) - \frac{EI_y}{GA_S}\frac{1}{L^2}\frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2} \tag{3.107}$$

Notând

$$K = 12\frac{EI_y}{GA_S L^2} \tag{3.108}$$

Ecuaţia (3.107) pentru elementul Timoshenko în coordonate adimensionale corespunzătoare planului x-z este:

$$\frac{1}{L}\frac{dw}{d\xi} = (-\varphi) - \frac{K}{12}\frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2} \tag{3.109}$$

Funcţii de formă pentru elementul Timoshenko în planul x-y

Pentru aproximarea deplasărilor şi rotirilor elementului de bară, se folosesc funcţii polinomiale de gradul trei de forma:

$$\begin{cases} v(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0 \\ \psi(\xi) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 \end{cases} \tag{3.110}$$

Se înlocuiesc relaţiile (3.110) în ecuaţia de mişcare a elementului din planul x-y (3.86).

Dar

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} &= 3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1 \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= 3B_3\xi^2 + 2B_2\xi + B_1 \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= 6B_3\xi + 2B_2 \end{aligned} \tag{3.111}$$

Rezultă că:

$$\frac{1}{L}\left(3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1\right) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 - \frac{K}{12}\left(6B_3\xi + 2B_2\right) \tag{3.112}$$

Ordonând şi în membrul drept şi în membrul stâng după puterile lui ξ, rezultă:

$$\frac{3A_3}{L}\xi^2 + \frac{2A_2}{L}\xi + \frac{A_1}{L} = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + \left(B_1 - \frac{KB_3}{2}\right)\xi + \left(B_0 - \frac{KB_2}{6}\right) \tag{3.113}$$

iar prin identificare se obţine:

$$\begin{cases} B_3 = 0 \\ \dfrac{3A_3}{L} = B_2 \\ \dfrac{2A_2}{L} = B_1 - \dfrac{KB_3}{2} \\ \dfrac{A_1}{L} = B_0 - \dfrac{KB_2}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_3 = 0 \\ B_2 = \dfrac{3}{L}A_3 \\ B_1 = \dfrac{2}{L}A_2 \\ B_0 = \dfrac{1}{L}\left(A_1 + \dfrac{K}{2}A_3\right) \end{cases} \qquad (3.114)$$

astfel, pentru că $B_3 = 0$, funcţia $\psi(\xi)$ este de gradul doi:

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 = \\ &= \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right). \end{aligned} \qquad (3.115)$$

Deplasarea liniară v şi rotirea ψ se aproximează în funcţie de deplasările nodale, cu ajutorul funcţiilor de formă statice N, în felul următor:

$$\begin{cases} v(\xi) = N_1(\xi)v_i + N_2(\xi)\psi_i + N_3(\xi)v_j + N_4(\xi)\psi_j = \lfloor N \rfloor \{u_y{}^s\} \\ \psi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)v_i + \tilde{N}_2(\xi)\psi_i + \tilde{N}_3(\xi)v_j + \tilde{N}_4(\xi)\psi_j = \lfloor \tilde{N} \rfloor \{u_y{}^s\} \end{cases} \qquad (3.116)$$

unde am folosit notaţia (3.3) şi în plus

$$\begin{aligned} \lfloor N \rfloor &= \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor \\ \lfloor \tilde{N} \rfloor &= \lfloor \tilde{N}_1 \quad \tilde{N}_2 \quad \tilde{N}_3 \quad \tilde{N}_4 \rfloor \end{aligned} \qquad (3.117)$$

Calculul funcţiilor de formă

Funcţiile de formă au următoarele proprietăţi importante:

1. Suma funcţiilor de formă are valoarea egală cu 1 în orice nod;
2. Corespunzător coordonatei n, funcţia de formă $N_n=1$, iar celelalte funcţii de formă au valori nule.

Pentru $v_i = v(x=0) = v(\xi=0) \rightarrow N_1(\xi)=1; \tilde{N}_1(\xi)=1;$

Pentru $\psi_i = \psi(x=0) = \psi(\xi=0) \rightarrow N_2(\xi)=1; \tilde{N}_2(\xi)=1;$

Pentru $v_j = v(x=L) = v(\xi=1) \rightarrow N_3(\xi)=1; \tilde{N}_3(\xi)=1;$ (3.118)

Pentru $\psi_j = \psi(x=L) = \psi(\xi=1) \rightarrow N_4(\xi)=1; \tilde{N}_4(\xi)=1.$

Calculul funcţiilor de formă este prezentat pe larg în **Anexa 2**.

Funcţii de formă pentru elementul Timoshenko în planul x-z

Ecuaţia de legătură între **w** şi **φ** pentru elementul Timoshenko în planul x-z este dată de relaţia (3.109):

$$\frac{1}{L}\frac{dw}{d\xi} = (-\varphi) - \frac{K}{12}\frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2}.$$

Pentru aproximarea deplasărilor şi rotirilor elementului de bară în acest plan, se folosesc tot funcţii polinomiale de gradul trei de forma:

$$\begin{cases} w(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0 \\ -\varphi(\xi) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 \end{cases} \tag{3.119}$$

Se înlocuiesc relaţiile (3.119) în ecuaţia de mişcare a elementului din planul x-z .

Dar

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{d\xi} = 3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1 \\ &\frac{d(-\varphi)}{d\xi} = 3B_3\xi^2 + 2B_2\xi + B_1 \\ &\frac{d^2(-\varphi)}{d\xi^2} = 6B_3\xi + 2B_2 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Rezultă că:

$$\frac{1}{L}\left(3A_3\xi^2 + 2A_2\xi + A_1\right) = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + B_1\xi + B_0 - \frac{K}{12}\left(6B_3\xi + 2B_2\right)$$

Ordonând şi în membrul drept şi în membrul stâng după puterile lui ξ, rezultă:

$$\frac{3A_3}{L}\xi^2 + \frac{2A_2}{L}\xi + \frac{A_1}{L} = B_3\xi^3 + B_2\xi^2 + \left(B_1 - \frac{KB_3}{2}\right)\xi + \left(B_0 - \frac{KB_2}{6}\right)$$

iar prin identificare se obţin pentru constantele $\mathbf{A_i}, \mathbf{B_i}$ **cu** $(\ \mathbf{i = 1,2,3,4}\ )$ aceleaşi valori ca şi în planul x-y:

$$\begin{cases} \mathbf{B_3 = 0} \\ \dfrac{\mathbf{3A_3}}{\mathbf{L}} = \mathbf{B_2} \\ \dfrac{\mathbf{2A_2}}{\mathbf{L}} = \mathbf{B_1} - \dfrac{\mathbf{KB_3}}{\mathbf{2}} \\ \dfrac{\mathbf{A_1}}{\mathbf{L}} = \mathbf{B_0} - \dfrac{\mathbf{KB_2}}{\mathbf{6}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B_3 = 0} \\ \mathbf{B_2} = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_3} \\ \mathbf{B_1} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_2} \\ \mathbf{B_0} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\left(\mathbf{A_1} + \dfrac{\mathbf{K}}{\mathbf{2}}\mathbf{A_3}\right) \end{cases}$$

astfel încât, pentru că $\mathbf{B_3 = 0}$ şi funcţia $[\ -\varphi(\xi)\ ]$ este de gradul doi:

$$\begin{aligned} -\varphi(\xi) &= \mathbf{B_2}\xi^2 + \mathbf{B_1}\xi + \mathbf{B_0} = \\ &= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_3}\xi^2 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{L}}\mathbf{A_2}\xi + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\left(\mathbf{A_1} + \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{2}}\mathbf{A_3}\right). \end{aligned}$$

De asemenea şi deplasarea w şi rotirea $(-\varphi)$ se aproximează în funcţie de deplasările nodale, cu ajutorul funcţiilor de formă statice N:

$$\begin{cases} \mathbf{w}(\xi) = \mathbf{N_1}(\xi)\mathbf{w_i} - \mathbf{N_2}(\xi)\varphi_\mathbf{i} + \mathbf{N_3}(\xi)\mathbf{w_j} - \mathbf{N_4}(\xi)\varphi_\mathbf{j} = \lfloor \mathbf{N} \rfloor \{\mathbf{u_z}^s\} \\ -\varphi(\xi) = \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{1}(\xi)\mathbf{w_i} - \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{2}(\xi)\varphi_\mathbf{i} + \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{3}(\xi)\mathbf{w_j} - \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{4}(\xi)\varphi_\mathbf{j} = \lfloor \tilde{\mathbf{N}} \rfloor \{\mathbf{u_z}^s\} \end{cases} \quad (3.121)$$

unde am folosit notaţia (3.3) şi la fel

$$\begin{aligned} \lfloor \mathbf{N} \rfloor &= \lfloor \mathbf{N_1} \quad \mathbf{N_2} \quad \mathbf{N_3} \quad \mathbf{N_4} \rfloor \\ \lfloor \tilde{\mathbf{N}} \rfloor &= \lfloor \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{1} \quad \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{2} \quad \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{3} \quad \tilde{\mathbf{N}}_\mathbf{4} \rfloor \end{aligned}$$

Calculul funcţiilor de formă

Folosind proprietăţile funcţiilor de formă, relaţiile (3.118), se calculează expresiile acestora şi în planul x-z.

Calculul funcţiilor de formă este prezentat pe larg în **Anexa 2**.

Funcţii de formă pentru deplasări, valabile atât în planul x-y cât şi în planul x-z sunt:

$$\begin{cases} N_1(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 + K(1-\xi)\right], \\ N_2(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[L\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) + K\dfrac{L}{2}\left(\xi - \xi^2\right)\right], \\ N_3(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left(3\xi^2 - 2\xi^3 + K\xi\right), \\ N_4(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[L\left(-\xi^2 + \xi^3\right) + K\dfrac{L}{2}\left(-\xi + \xi^2\right)\right]. \end{cases} \tag{3.122}$$

Funcţiile de formă pentru rotiri, notate $\tilde{N}_i(\xi)$ în planul x-y, diferă doar prin semnul „minus” de funcţiile de formă pentru rotiri din planul x-z notate $\tilde{N}_{i\varphi}(\xi)$.

Funcţii de formă pentru rotiri în planul x-z sunt:

$$\begin{cases} \tilde{N}_{1\varphi}(\xi) = -\dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)\right] = -\tilde{N}_1(\xi), \\ \tilde{N}_{2\varphi}(\xi) = -\dfrac{1}{1+K}\left[3\xi^2 - 4\xi + 1 + K(1-\xi)\right] = -\tilde{N}_2(\xi), \\ \tilde{N}_{3\varphi}(\xi) = -\dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(-6\xi^2 + 6\xi\right)\right] = -\tilde{N}_3(\xi), \\ \tilde{N}_{4\varphi}(\xi) = -\dfrac{1}{1+K}\left[3\xi^2 - 2\xi + K\xi\right] = -\tilde{N}_4(\xi). \end{cases} \tag{3.123}$$

Deci relaţia (3.56) este valabilă şi pentru funcţiile de formă corespunzătoare elementului Timoshenko:

$$\lfloor \tilde{N}_\varphi \rfloor = -\lfloor \tilde{N} \rfloor$$

Este utilă introducerea unui al treilea set de funcţii de formă care se folosesc la calculul matricei de rigiditate şi se definesc astfel:

$$\left\lfloor \hat{\mathbf{N}} \right\rfloor = \left\lfloor \tilde{\mathbf{N}} \right\rfloor - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} \left\lfloor \frac{\mathbf{dN}}{\mathbf{d\xi}} \right\rfloor. \tag{3.123a}$$

Acestea sunt:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{N}}_1(\xi) = & -\hat{\mathbf{N}}_3(\xi) = & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}} \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1}+\mathbf{K}} \\ \hat{\mathbf{N}}_2(\xi) = & \hat{\mathbf{N}}_4(\xi) = & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{K}}{\mathbf{1}+\mathbf{K}} \end{cases} \tag{3.123b}$$

3.1.1.3. Matricea de masă, matricea giroscopică şi matricea de rigiditate pentru elementul de arbore cilindric

În cele ce urmează, matricele de masă, giroscopică şi de rigiditate pentru un element de arbore se stabilesc pornind de la expresiile energiei cinetice şi potenţiale, folosind ecuaţiile Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \qquad (3.124)$$

unde

T – energia cinetică;

V – energia potenţială;

q_i - coordonatele generalizate;

$\dot{q}_i$ - vitezele generalizate;

Q_i - forţele generalizate.

Energia cinetică pentru un element de arbore se poate scrie:

$$T^S = \frac{1}{2} m_S \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{1}{2}\left(J_x \omega_x{}^2 + J_y \omega_y{}^2 + J_z \omega_z{}^2\right) \quad (3.125)$$

unde

$J_x = J_P$ şi $J_y = J_z = J_T$ sunt momentele de inerţie principale ale arborelui faţă de sistemul de axe mobil xyz, fixat pe arbore;

m_S - masa elementului de arbore;

J_P - momentul de inerţie masic polar al elementului de arbore;

J_T - momentul de inerţie masic transversal al elementului de arbore.

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - componentele vitezei unghiulare în sistemul de axe mobil xyz. Acestea au următoarea expresie:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega + \dot{\varphi}\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta \end{Bmatrix}$$

în care

$\mathbf{\Omega}$ = viteza unghiulară cu care arborele se roteşte în jurul axei x; $\theta = \Omega t$.

Atunci, expresia energiei cinetice este:

$$\mathbf{T^S = \frac{1}{2} m_S \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{1}{2} J_P{}^S \left(\Omega + \dot{\varphi}\psi\right)^2 + \\ + \frac{1}{2} J_T{}^S \left[\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\right)^2\right]} \tag{3.126}$$

iar după desfacerea parantezelor, devine:

$$\mathbf{T^S = \underbrace{\frac{1}{2} m_S \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right)}_{\substack{\text{energia cinetica}\\ \text{de translatie}}} + \underbrace{\frac{1}{2} J_P{}^S \Omega^2}_{\substack{\text{energie de}\\ \text{rotatie ct.}}} + \underbrace{J_P{}^S \Omega \dot{\varphi}\psi}_{\substack{\text{efect}\\ \text{giroscopic}}} + \underbrace{\frac{1}{2} J_P{}^S \dot{\varphi}^2 \psi^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} J_T{}^S \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right)}_{\substack{\text{energie cinetica}\\ \text{de rotatie}}}} \tag{3.127}$$

Pentru un element de arbore de lungime infinit mică dx, energia cinetică este:

$$\mathbf{dT^S = \left[\frac{1}{2} \rho A \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{1}{2} \rho I_P \left(\Omega^2 + 2\Omega \dot{\varphi}\psi\right) + \frac{1}{2} \rho I \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right)\right] dx} \tag{3.128}$$

unde

$$\mathbf{m_S = \mu\, dx = \rho A\, dx},$$

$$\mathbf{J_P = \rho I_P dx},$$

$$\mathbf{J_T = \rho I dx},$$

$$\mathbf{I_p = 2I},$$

$$\mathbf{\mu = \rho A},$$

$$\mathbf{\hat{\mu} = \rho I = \frac{1}{L} J_T{}^S},$$

$$\hat{\mu}_P = \rho I_P = \frac{1}{L} J_P{}^S.$$

Folosind aceste relaţii se poate scrie:

$$dT^S = \left[\frac{\mu}{2}\left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{\hat{\mu}}{2}\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right) + \frac{1}{2L} J_P{}^S \Omega^2 + \hat{\mu}_P \Omega \dot{\varphi} \psi\right] dx \qquad (3.129)$$

Integrând expresia energiei cinetice pentru elementul de arbore, se obţine:

$$T^S = \frac{\mu}{2}\int_0^L \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) dx + \frac{\hat{\mu}}{2}\int_0^L \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right) dx + \frac{1}{2L} J_P{}^S \Omega^2 \int_0^L dx + \hat{\mu}_P \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \psi dx,$$

Deci

$$T^S = \frac{\mu}{2}\int_0^L \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) dx + \frac{\hat{\mu}}{2}\int_0^L \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right) dx + \hat{\mu}_P \Omega \int_0^L \dot{\varphi} \psi dx + \frac{1}{2} J_P{}^S \Omega^2. \qquad (3.130)$$

Energia de translaţie

Primul termen din relaţia (3.130) reprezintă energia cinetică de translaţie:

$$T_1{}^S = \frac{1}{2}\mu \int_0^L \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) dx. \qquad (3.131)$$

În această relaţie, vitezele se pot scrie în funcţie de coordonatele nodale şi de funcţiile de formă:

$$v = \lfloor N \rfloor \{u_y{}^S\} \qquad w = \lfloor N \rfloor \{u_z{}^S\}$$

$$\dot{v} = \lfloor N \rfloor \{\dot{u}_y{}^S\} = v^T = \{\dot{u}_y{}^S\}^T \lfloor N \rfloor^T \qquad \dot{w} = \lfloor N \rfloor \{\dot{u}_z{}^S\} = w^T = \{\dot{u}_z{}^S\}^T \lfloor N \rfloor^T$$

$$\dot{v}^2 = \dot{v}^T \dot{v} = \{\dot{u}_y{}^S\}^T \lfloor N \rfloor^T \lfloor N \rfloor \{\dot{u}_y{}^S\} \qquad \dot{w}^2 = \dot{w}^T \dot{w} = \{\dot{u}_z{}^S\}^T \lfloor N \rfloor^T \lfloor N \rfloor \{\dot{u}_z{}^S\}$$

După înlocuire rezultă:

$$\mathbf{T_1}^S = \frac{1}{2}\left\{\dot{\mathbf{u}}_y{}^S\right\}^T \cdot \underbrace{\mu\int_0^L \lfloor \mathbf{N} \rfloor^T \lfloor \mathbf{N} \rfloor \mathbf{dx}}_{\left[\mathbf{m_T}^S\right]} \cdot \left\{\dot{\mathbf{u}}_y{}^S\right\} + \frac{1}{2}\left\{\dot{\mathbf{u}}_z{}^S\right\}^T \cdot \underbrace{\mu\int_0^L \lfloor \mathbf{N} \rfloor^T \lfloor \mathbf{N} \rfloor \mathbf{dx}}_{\left[\mathbf{m_T}^S\right]} \cdot \left\{\dot{\mathbf{u}}_z{}^S\right\}$$

(3.132)

Se trece la coordonata adimensională $\xi = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{L}}$. Atunci $\mathbf{d}\xi = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{L}}\mathbf{dx}$, adică $\mathbf{dx} = \mathbf{L}\mathbf{d}\xi$, astfel încât submatricea de masă de translaţie pentru elementul de arbore este:

$$\left[\mathbf{m_T}^S\right] = \mu\int_0^L \lfloor \mathbf{N} \rfloor^T \lfloor \mathbf{N} \rfloor \mathbf{dx},$$

sau

$$\left[\mathbf{m_T}^S\right] = \mu\mathbf{L}\int_0^1 \lfloor \mathbf{N}(\xi) \rfloor^T \lfloor \mathbf{N}(\xi) \rfloor \mathbf{d}\xi. \qquad (3.133)$$

Pentru că funcţiile de formă de translaţie au expresii identice atât în planul x-y cât şi în planul x-z, submatricea de masă de translaţie are aceeaşi formă în ambele plane.

<u>Energia de rotaţie</u>

Al doilea termen din relaţia (3.130) reprezintă energia cinetică de rotaţie:

$$\mathbf{T_2}^S = \frac{1}{2}\hat{\mu}\int_0^L \left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right)\mathbf{dx}. \qquad (3.134)$$

În această relaţie, derivatele în raport cu timpul se pot scrie în funcţie de coordonatele nodale şi de funcţiile de formă:

$$\psi = \lfloor \tilde{N} \rfloor \{ u_y{}^S \} \qquad \varphi = -\lfloor \tilde{N} \rfloor \{ u_z{}^S \}$$

$$\dot{\psi} = \lfloor \tilde{N} \rfloor \{ \dot{u}_y{}^S \} = \dot{\psi}^T = \{ \dot{u}_y{}^S \}^T \lfloor \tilde{N} \rfloor^T \qquad \dot{\varphi} = -\lfloor \tilde{N} \rfloor \{ \dot{u}_z{}^S \} = \dot{\varphi}^T = -\{ \dot{u}_z{}^S \}^T \lfloor \tilde{N} \rfloor^T$$

$$\dot{\psi}^2 = \dot{\psi}^T \dot{\psi} = \{ \dot{u}_y{}^S \}^T \lfloor \tilde{N} \rfloor^T \lfloor \tilde{N} \rfloor \{ \dot{u}_y{}^S \} \qquad \dot{\varphi}^2 = \dot{\varphi}^T \dot{\varphi} = \{ \dot{u}_z{}^S \}^T \lfloor \tilde{N} \rfloor^T \lfloor \tilde{N} \rfloor \{ \dot{u}_z{}^S \}$$

După înlocuire rezultă:

$$T_2{}^S = \frac{1}{2} \{ \dot{u}_y{}^S \}^T \cdot \underbrace{\hat{\mu} \int_0^L \lfloor \tilde{N} \rfloor^T \lfloor \tilde{N} \rfloor dx}_{[m_R{}^S]} \cdot \{ \dot{u}_y{}^S \} + \frac{1}{2} \{ \dot{u}_z{}^S \}^T \cdot \underbrace{\hat{\mu} \int_0^L \lfloor \tilde{N} \rfloor^T \lfloor \tilde{N} \rfloor dx}_{[m_R{}^S]} \cdot \{ \dot{u}_z{}^S \} \tag{3.135}$$

Se trece, de asemenea, la coordonata adimensională $\xi = \frac{x}{L}$, având $d\xi = \frac{1}{L} dx$, adică $dx = L d\xi$, astfel încât submatricea de masă de rotaţie pentru elementul de arbore este:

$$[m_R{}^S] = \hat{\mu} \int_0^L \lfloor \tilde{N} \rfloor^T \lfloor \tilde{N} \rfloor dx,$$

deci

$$[m_R{}^S] = \hat{\mu} L \int_0^1 \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor^T \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor d\xi. \tag{3.136}$$

Submatricea de masă de rotaţie, pentru un element de arbore, are aceeaşi formă în ambele plane x-y şi y-z.

Submatricea de masă pentru un element de arbore are forma generală:

$$[m^S] = [m_T{}^S] + [m_R{}^S], \tag{3.137}$$

adică

$$[m^S] = \mu L \int_0^1 \lfloor N(\xi) \rfloor^T \lfloor N(\xi) \rfloor d\xi + \hat{\mu} L \int_0^1 \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor^T \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor d\xi \tag{3.138}$$

Energia datorită efectului giroscopic (Coriolis)

Al treilea termen din relaţia (3.130) reprezintă energia datorită efectului giroscopic:

$$\mathbf{T_3}^{\mathbf{S}} = \hat{\mu}_{\mathbf{P}}\Omega\int_{0}^{L}\dot{\varphi}\psi\,\mathbf{dx} \qquad (3.139)$$

Introducând pe $\dot{\varphi}$ şi pe ψ , rezultă:

$$\mathbf{T_3}^{\mathbf{S}} = -\Omega\left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\}^{\mathbf{T}}\cdot\underbrace{\hat{\mu}_{\mathbf{P}}\int_{0}^{L}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor^{\mathbf{T}}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor\mathbf{dx}}_{\left[\mathbf{g}^{\mathbf{S}}\right]}\cdot\left\{\mathbf{u}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\}.$$

Submatricea giroscopică are, deci, forma:

$$\left[\mathbf{g}^{\mathbf{S}}\right] = \hat{\mu}_{\mathbf{P}}\int_{0}^{L}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor^{\mathbf{T}}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor\mathbf{dx}$$

şi trecând la coordonata adimensională ξ ,

$$\left[\mathbf{g}^{\mathbf{S}}\right] = \hat{\mu}_{\mathbf{P}}\mathbf{L}\int_{0}^{1}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}(\xi)\rfloor^{\mathbf{T}}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}(\xi)\rfloor\mathbf{d}\xi = 2\left[\mathbf{m_R}{}^{\mathbf{S}}\right] \qquad (3.140)$$

Energia cinetică pentru un element de arbore cilindric se poate scrie:

$$\mathbf{T}^{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{m}^{\mathbf{S}}\right]\left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{m}^{\mathbf{S}}\right]\left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\} - \Omega\left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\}^{\mathbf{T}}\left[\mathbf{g}^{\mathbf{S}}\right]\left\{\mathbf{u}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\} + \frac{1}{2}\mathbf{J_P}{}^{\mathbf{S}}\Omega^{2} \qquad (3.141)$$

Înlocuind această expresie în ecuaţiile Lagrange, se obţine:

$$\begin{bmatrix} \left[\mathbf{m}^{\mathbf{S}}\right] & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & \left[\mathbf{m}^{\mathbf{S}}\right] \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \left\{\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\} \\ \left\{\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\} \end{Bmatrix} + \Omega\cdot\begin{bmatrix} [\mathbf{0}] & \left[\mathbf{g}^{\mathbf{S}}\right] \\ -\left[\mathbf{g}^{\mathbf{S}}\right] & [\mathbf{0}] \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} \left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\} \\ \left\{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{\mathbf{f}_{\mathbf{y}}{}^{\mathbf{S}}\right\} \\ \left\{\mathbf{f}_{\mathbf{z}}{}^{\mathbf{S}}\right\} \end{Bmatrix} \qquad (3.142)$$

sau

$$\left[\mathbf{M}^{s}\right]\{\ddot{\mathbf{u}}\}+\Omega\left[\mathbf{G}^{s}\right]\{\dot{\mathbf{u}}\}=\left\{\mathbf{f}^{s}\right\} \tag{3.143}$$

unde matricea globală de masă $\left[\mathbf{M}^{s}\right]$ este simetrică, de ordin 8x8, iar matricea globală giroscopică $\left[\mathbf{G}^{s}\right]$ este antisimetrică, de ordin 8x8.

Energia potenţială de deformaţie

Pentru un element de arbore infinit mic, energia potenţială de deformaţie, în cazul general, are forma:

$$\mathbf{dU}=\frac{1}{2}\left\{\mathbf{EI}\left[\left(\frac{\mathbf{d\psi}}{\mathbf{dx}}\right)^{2}+\left(\frac{\mathbf{d\varphi}}{\mathbf{dx}}\right)^{2}\right]+\mathbf{GA_S}\left(\gamma_{xy}{}^{2}+\gamma_{xz}{}^{2}\right)\right\}\mathbf{dx} \tag{3.144}$$

Integrând şi înlocuind deformaţiile de forfecare din relaţiile (3.67) şi (3.92), se obţine:

$$\mathbf{U}=\frac{\mathbf{EI}}{2}\int_{0}^{L}\left(\psi'^{2}+\varphi'^{2}\right)\mathbf{dx}+\frac{\mathbf{GA_S}}{2}\int_{0}^{L}\left[\left(\mathbf{v}'-\psi\right)^{2}+\left(\mathbf{w}'+\varphi\right)^{2}\right]\mathbf{dx} \tag{3.145}$$

a. Energia de încovoiere

Primul termen din relaţia (3.145) reprezintă energia datorită încovoierii:

$$\mathbf{U_1}=\frac{\mathbf{EI}}{2}\int_{0}^{L}\left(\psi'^{2}+\varphi'^{2}\right)\mathbf{dx}=$$

$$=\frac{\mathbf{EI}}{2}\int_{0}^{L}\psi'^{2}\mathbf{dx}+\frac{\mathbf{EI}}{2}\int_{0}^{L}\left(-\varphi'\right)^{2}\mathbf{dx} \tag{3.146}$$

Se trece la coordonata adimensională ξ folosită şi anterior şi se face notaţia:

$$(\ldots\ldots)^{\nabla} = \frac{d}{d\xi}(\ldots\ldots) \tag{3.147}$$

dar

$$\psi = \lfloor \tilde{N} \rfloor \{u_y{}^s\} \qquad \varphi = -\lfloor \tilde{N} \rfloor \{u_z{}^s\}$$

$$\psi' = \frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{1}{L}\lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor \{u_y{}^s\} = \qquad \varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{L}\frac{d\varphi}{d\xi} = -\frac{1}{L}\lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor \{u_z{}^s\} =$$

$$= \psi'^{T} = \frac{1}{L}\{u_y{}^s\}^T \lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor^T \qquad = \varphi'^{T} = -\frac{1}{L}\{u_z{}^s\}^T \lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor^T$$

$$\psi'^2 = \psi'^T \psi' = \qquad \varphi'^2 = \varphi'^T \varphi' =$$

$$= \frac{1}{L^2}\{u_y{}^s\}^T \lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor^T \lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor \{u_y{}^s\} \qquad = \frac{1}{L^2}\{u_z{}^s\}^T \lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor^T \lfloor \tilde{N}^{\nabla} \rfloor \{u_z{}^s\}$$

$$v = \lfloor N \rfloor \{u_y{}^s\} \qquad w = \lfloor N \rfloor \{u_z{}^s\}$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{L}\frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{L}\lfloor N^{\nabla} \rfloor \{u_y{}^s\} \qquad w' = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{L}\frac{dw}{d\xi} = \frac{1}{L}\lfloor N^{\nabla} \rfloor \{u_z{}^s\}$$

Astfel încât, pentru energia de încovoiere, se ajunge la expresia:

$$\mathbf{U_1 = \frac{1}{2}\{u_y{}^S\}^T \cdot \underbrace{\frac{EI}{L}\int_0^1 \lfloor \tilde{N}^\nabla \rfloor^T \lfloor \tilde{N}^\nabla \rfloor d\xi}_{[k_B{}^S]} \cdot \{u_y{}^S\} + \frac{1}{2}\{u_z{}^S\}^T \cdot \underbrace{\frac{EI}{L}\int_0^1 \lfloor \tilde{N}^\nabla \rfloor^T \lfloor \tilde{N}^\nabla \rfloor d\xi}_{[k_B{}^S]} \cdot \{u_z{}^S\}} \tag{3.148}$$

Submatricea de rigiditate de încovoiere, utilizând coordonata adimensională ξ este:

$$\mathbf{[k_B{}^S] = \frac{EI}{L}\int_0^1 \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor^T \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor d\xi} \tag{3.149}$$

b. Energia de forfecare

Al doilea termen din relaţia (3.145) reprezintă energia datorită forfecării:

$$\mathbf{U_2 = \frac{GA_S}{2}\int_0^L (\psi - v')^2 dx + \frac{GA_S}{2}\int_0^L (\varphi + w')^2 dx} \tag{3.150}$$

unde

$$\psi - v' = (\lfloor \tilde{N} \rfloor - \lfloor N' \rfloor)\{u_y{}^S\} = \left(\lfloor \tilde{N} \rfloor - \frac{1}{L}\lfloor N^\nabla \rfloor\right)\{u_y{}^S\} = \lfloor \hat{N} \rfloor \{u_y{}^S\}$$

$$\varphi + w' = -(\lfloor \tilde{N} \rfloor - \lfloor N' \rfloor)\{u_z{}^S\} = -\left(\lfloor \tilde{N} \rfloor - \frac{1}{L}\lfloor N^\nabla \rfloor\right)\{u_z{}^S\} = -\lfloor \hat{N} \rfloor \{u_z{}^S\}.$$

Atunci

$$\mathbf{U_2 = \frac{1}{2}\{u_y{}^S\}^T \cdot \underbrace{GA_S L\int_0^1 \lfloor \hat{N} \rfloor^T \lfloor \hat{N} \rfloor d\xi}_{[k_S{}^S]} \cdot \{u_y{}^S\} + \frac{1}{2}\{u_z{}^S\}^T \cdot \underbrace{GA_S L\int_0^1 \lfloor \hat{N} \rfloor^T \lfloor \hat{N} \rfloor d\xi}_{[k_S{}^S]} \cdot \{u_z{}^S\}} \tag{3.151}$$

<u>Submatricea de rigiditate de forfecare,</u> utilizând coordonata adimensională ξ este:

$$\left[k_S{}^S\right] = GA_S L\int_0^1 \left\lfloor \hat{N} \right\rfloor^T \left\lfloor \hat{N} \right\rfloor d\xi \quad (3.152)$$

Energia totală de deformaţie pentru un element de arbore este:

$$U = \frac{1}{2}\left\{u_y{}^S\right\}^T \left[k^S\right]\left\{u_y{}^S\right\} + \frac{1}{2}\left\{u_z{}^S\right\}^T \left[k^S\right]\left\{u_z{}^S\right\} \quad (3.153)$$

<u>Submatricea de rigiditate</u> pentru un element de arbore are forma generală:

$$\left[k^S\right] = \left[k_B{}^S\right] + \left[k_S{}^S\right], \quad (3.154)$$

adică

$$\left[k^S\right] = \frac{EI}{L}\int_0^1 \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor^T \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor d\xi + GA_S L\int_0^1 \left\lfloor \hat{N} \right\rfloor^T \left\lfloor \hat{N} \right\rfloor d\xi \quad (3.155)$$

Înlocuind energia U în ecuaţiile Lagrange, se obţine:

$$\begin{bmatrix} \left[k^S\right] & [0] \\ [0] & \left[k^S\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \left\{u_y{}^S\right\} \\ \left\{u_z{}^S\right\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left\{f_y{}^S\right\} \\ \left\{f_z{}^S\right\} \end{Bmatrix} \quad (3.156.a)$$

sau

$$\left[K^S\right] \cdot \{u\} = \left\{f^S\right\} \quad (3.156.b)$$

unde $\left[K^S\right]$ este matricea globală de rigiditate, de ordin 8x8, pentru un element de arbore cilindric.

Deci, combinând (3.143) şi (3.156.b) rezultă ecuaţiile de mişcare în funcţie de matricele globale:

$$\left[M^S\right]\{\ddot{u}\} + \Omega\left[G^S\right]\{\dot{u}\} + \left[K^S\right] = \left\{f^S\right\} \quad (3.157)$$

Pentru stabilirea formelor explicite ale submatricelor de masă, giroscopică şi de rigiditate, este nevoie de calcularea integralelor următoare, pentru fiecare tip de element de arbore în parte:

$$\int_0^1 \lfloor N(\xi) \rfloor^T \lfloor N(\xi) \rfloor d\xi$$

$$\int_0^1 \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor^T \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor d\xi$$

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor^T \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor d\xi$$

$$\int_0^1 \lfloor \hat{N} \rfloor^T \lfloor \hat{N} \rfloor d\xi$$

În **Anexa 3** este prezentată pe larg rezolvarea acestor integrale pentru calculul submatricelor corespunzătoare elementului de arbore Bernoulli-Euler, iar în **Anexa 4** este prezentat calculul submatricelor corespunzătoare elementului de arbore Timoshenko.

Se obţin următoarele:

<u>Submatricea coerentă de masă pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler este:</u>

$$\left[m^S\right] = \mu L \int_0^1 \lfloor N(\xi) \rfloor^T \lfloor N(\xi) \rfloor d\xi = \frac{\mu L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ \vdots & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \vdots & \vdots & 156 & -22L \\ sim & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix}$$

(3.158)

Submatricea de rigiditate pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler este:

$$\left[k^S\right]=\frac{EI}{L}\int_0^1\left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right]^T\left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right]d\xi=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12 & 6L & -12 & 6L\\ \vdots & 4L^2 & -6L & 2L^2\\ \vdots & \vdots & 12 & -6L\\ sim & \vdots & \vdots & 4L^2\end{bmatrix}$$ (3.159)

Submatricea coerentă de masă pentru elementul de arbore Timoshenko are următoarea expresie:

$$\left[m^s\right]=$$

$$=\frac{1}{(1+K)^2}\left[\frac{\mu L}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 54 & -13L\\ \vdots & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ \vdots & \vdots & 156 & -22L\\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2\end{bmatrix}+K\frac{\mu L}{120}\begin{bmatrix}84 & 11L & 36 & -9L\\ \vdots & 2L^2 & 9L & -2L^2\\ \vdots & \vdots & 84 & -11L\\ \vdots & \vdots & \vdots & 2L^2\end{bmatrix}+\right.$$

$$+K^2\frac{\mu L}{120}\begin{bmatrix}40 & 5L & 20 & -5L\\ \vdots & L^2 & 5L^2 & -L^2\\ \vdots & \vdots & 40 & -5L\\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2\end{bmatrix}+\frac{\hat{\mu}L}{30L^2}\begin{bmatrix}36 & 3L & -36 & 3L\\ \vdots & 4L^2 & -3L & -L^2\\ \vdots & \vdots & 36 & -3L\\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2\end{bmatrix}+$$

$$\left.+K\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix}0 & -3L & 0 & -3L\\ \vdots & L^2 & 3L & -L^2\\ \vdots & \vdots & 0 & 3L\\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2\end{bmatrix}+K^2\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 2L^2 & 0 & L^2\\ \vdots & \vdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & 2L^2\end{bmatrix}\right].$$

(3.160)

Sau altfel scrisă,

$$\left[\mathbf{m}^{S}\right]=\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}^{S} & \mathbf{m}_{12}^{S} & \mathbf{m}_{13}^{S} & \mathbf{m}_{14}^{S} \\ \vdots & \mathbf{m}_{22}^{S} & \mathbf{m}_{23}^{S} & \mathbf{m}_{24}^{S} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{m}_{33}^{S} & \mathbf{m}_{34}^{S} \\ \mathbf{sim} & \vdots & \vdots & \mathbf{m}_{44}^{S} \end{bmatrix}, \tag{3.161}$$

unde:

$$\mathbf{m}_{11}^{S}=\left(156+294K+140K^{2}\right)\alpha_{T}+36\alpha_{R}$$

$$\mathbf{m}_{12}^{S}=\left(22+38.5K+17.5K^{2}\right)L\alpha_{T}+\left(3-15K\right)L\alpha_{R}$$

$$\mathbf{m}_{13}^{S}=\left(54+126K+70K^{2}\right)\alpha_{T}-36\alpha_{R}$$

$$\mathbf{m}_{14}^{S}=-\left(13+31.5K+17.5K^{2}\right)L\alpha_{T}+\left(3-15K\right)L\alpha_{R}$$

$$\mathbf{m}_{22}^{S}=\left(4+7K+3.5K^{2}\right)L^{2}\alpha_{T}+\left(4+5K+10K^{2}\right)L^{2}\alpha_{R}$$

$$\mathbf{m}_{23}^{S}=-\mathbf{m}_{14}^{S}$$

$$\mathbf{m}_{24}^{S}=-\left(3+7K+3.5K^{2}\right)L^{2}\alpha_{T}-\left(1+5K-5K^{2}\right)L^{2}\alpha_{R}$$

$$\mathbf{m}_{33}^{S}=\mathbf{m}_{11}^{S}$$

$$\mathbf{m}_{34}^{S}=-\mathbf{m}_{12}^{S}$$

$$\mathbf{m}_{44}^{S}=\mathbf{m}_{22}^{S}$$

$$\alpha_{T}=\frac{\mu L}{420\left(1+K\right)^{2}} \tag{3.162}$$

$$\alpha_{R}=\frac{\hat{\mu}L}{30L^{2}\left(1+K\right)^{2}} \tag{3.163}$$

Submatricea giroscopică pentru elementul de arbore Timoshenko:

$$[g^S] = \frac{2}{(1+K)^2}\left[\frac{\hat{\mu}L}{30L^2}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ \vdots & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ \vdots & \vdots & 36 & -3L \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. + K\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix} 0 & -3L & 0 & -3L \\ \vdots & L^2 & 3L & -L^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 3L \\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2 \end{bmatrix} + K^2\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 2L^2 & 0 & L^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2L^2 \end{bmatrix}\right] \tag{3.164}$$

sau

$$[g^S] = \begin{bmatrix} g^S_{11} & g^S_{12} & g^S_{13} & g^S_{14} \\ \vdots & g^S_{22} & g^S_{23} & g^S_{24} \\ \vdots & \vdots & g^S_{33} & g^S_{34} \\ \text{sim} & \vdots & \vdots & g^S_{44} \end{bmatrix} \tag{3.165}$$

în care, cu aceleaşi notaţii făcute anterior (3.162), (3.163) pentru α_T şi α_R, elementele submatricei giroscopice au următoarele valori:

$$g^S_{11} = 72\alpha_R \qquad g^S_{23} = -g^S_{12}$$

$$g^S_{12} = 2(3-15K)L\alpha_R \qquad g^S_{24} = -2(1+5K-5K^2)L^2\alpha_R$$

$$g^S_{13} = -72\alpha_R \qquad g^S_{33} = g^S_{11}$$

$$g^S_{14} = 2(3-15K)L\alpha_R = g^S_{12} \qquad g^S_{34} = g^S_{23}$$

$$g^S_{22} = 2(4+5K+10K^2)L^2\alpha_R \qquad g^S_{44} = g^S_{22}$$

Submatricea de rigiditate pentru elementul de arbore Timoshenko este:

$$[k^s] = \frac{1}{1+K} \cdot \frac{EI}{L^3} \left[\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ \vdots & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \vdots & \vdots & 12 & -6L \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & L^2 & 0 & -L^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2 \end{bmatrix} \right] \quad (3.166)$$

3.1.1.4. Vectorul forţelor de dezechilibru masic pentru arborele cilindric

Se consideră o distribuţie liniară a dezechilibrului masic în lungul elementului de arbore, între $\mathbf{a_{CL}}$ şi $\mathbf{a_{SL}}$ la capătul din stânga şi $\mathbf{a_{CR}}$ şi $\mathbf{a_{SR}}$ la capătul din dreapta, de forma:

$$\begin{cases} \mathbf{a_C^S(\xi) = a_{CL}(1-\xi) + a_{CR}\xi} \\ \mathbf{a_S^S(\xi) = a_{SL}(1-\xi) + a_{SR}\xi} \end{cases} \tag{3.167}$$

unde

$$\begin{aligned} \mathbf{a_{CL}} &= \mathbf{a_L \cos\alpha_L}, \\ \mathbf{a_{SL}} &= \mathbf{a_L \sin\alpha_L}, \\ \mathbf{a_{CR}} &= \mathbf{a_R \cos\alpha_R}, \\ \mathbf{a_{SR}} &= \mathbf{a_R \sin\alpha_R}, \end{aligned} \tag{3.168}$$

iar

$\mathbf{a_L, a_R}$ sunt razele de dezechilibru, $\mathbf{\alpha_L, \alpha_R}$ sunt fazele dezechilibrului.

Sarcinile distribuite, corespunzătoare dezechilibrului masic sunt:

$$\begin{cases} \mathbf{p_y(\xi,t) = \mu\Omega^2 a_y^S(\xi,t)} \\ \mathbf{p_z(\xi,t) = \mu\Omega^2 a_z^S(\xi,t)} \end{cases} \tag{3.169}$$

unde

$$\begin{cases} \mathbf{a_y^S(\xi,t) = a_C^S(\xi)\cos\Omega t - a_S^S(\xi)\sin\Omega t} \\ \mathbf{a_z^S(\xi,t) = a_S^S(\xi)\cos\Omega t + a_C^S(\xi)\sin\Omega t} \end{cases} \tag{3.170}$$

Lucrul mecanic virtual al acestor forţe este:

$$\mathbf{\delta W = \int_0^L (\delta v)^T p_y dx + \int_0^L (\delta w)^T p_z dx =}$$

$$\mathbf{= \{\delta u_y^S\}^T \underbrace{\int_0^1 \lfloor N \rfloor^T p_y \cdot L \cdot d\xi}_{\{f_y^S\}} + \{\delta u_z^S\}^T \underbrace{\int_0^1 \lfloor N \rfloor^T p_z \cdot L \cdot d\xi}_{\{f_z^S\}}.} \tag{3.171}$$

Forţele nodale, echivalente cinematic sunt:

$$\left\{\mathbf{f}_y^S\right\} = \mu L\Omega^2 \int_0^1 \lfloor N \rfloor^T a_y^S \cdot d\xi$$

$$\left\{\mathbf{f}_z^S\right\} = \mu L\Omega^2 \int_0^1 \lfloor N \rfloor^T a_z^S \cdot d\xi \tag{3.172}$$

Vectorul dezechilibrului masic are expresia:

$$\begin{Bmatrix} \left\{\mathbf{f}_y^S\right\} \\ \left\{\mathbf{f}_z^S\right\} \end{Bmatrix} = \mu L\Omega^2 \begin{Bmatrix} \int_0^1 \lfloor N \rfloor^T a_C^S \cdot d\xi \\ \int_0^1 \lfloor N \rfloor^T a_S^S \cdot d\xi \end{Bmatrix} \cos\Omega t + \mu L\Omega^2 \begin{Bmatrix} -\int_0^1 \lfloor N \rfloor^T a_S^S \cdot d\xi \\ \int_0^1 \lfloor N \rfloor^T a_C^S \cdot d\xi \end{Bmatrix} \sin\Omega t . \tag{3.173}$$

Exemplu de calcul

$$\int_0^1 N_1(\xi) a_C^S \cdot d\xi = \int_0^1 N_1(\xi)\left[a_{CL}(1-\xi) + a_{CR}\xi\right] d\xi =$$

$$= a_{CL}\int_0^1 N_1(\xi)(1-\xi) d\xi + a_{CR}\int_0^1 N_1(\xi)\xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{120(1+K)}\left[(42+40K)a_{CL} + (18+20K)a_{CR}\right].$$

Asemănător se calculează şi celelalte integrale corespunzătoare celorlalte funcţii de formă. Se ajunge la:

$$\left\{f^S\right\} = \frac{\mu L \Omega^2}{120(1+K)}\left(\left\{\begin{matrix}[a]\left\{\begin{matrix}a_{CL}\\a_{CR}\end{matrix}\right\}\\ \hline [a]\left\{\begin{matrix}a_{SL}\\a_{SR}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\}\cos\Omega t + \left\{\begin{matrix}-[a]\left\{\begin{matrix}a_{SL}\\a_{SR}\end{matrix}\right\}\\ \hline [a]\left\{\begin{matrix}a_{CL}\\a_{CR}\end{matrix}\right\}\end{matrix}\right\}\sin\Omega t\right) \tag{3.174}$$

unde

$$[a] = \begin{bmatrix} 42+40K & 18+20K \\ (6+5K)L & (4+5K)L \\ 18+20K & 42+40K \\ -(4+5K)L & -(6+5K)L \end{bmatrix} \tag{3.175}$$

astfel încât

$$\left\{f^S\right\} = \left\{\begin{matrix}\{Q_y\}\\ \\ \{Q_z\}\end{matrix}\right\}\cos\Omega t + \left\{\begin{matrix}-\{Q_z\}\\ \\ \{Q_y\}\end{matrix}\right\}\sin\Omega t. \tag{3.176}$$

Vectorul forţelor de dezechilibru masic pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler

Folosind în calcule funcţiile de formă pentru elementul Bernoulli-Euler, rezultă:

$$[a]=\begin{bmatrix} 42 & 18 \\ 6L & 4L \\ 18 & 42 \\ -4L & -6L \end{bmatrix}, \tag{3.177}$$

care conduce la:

$$\{f_S\}=\frac{\mu L\Omega^2}{120}\left(\begin{Bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 L \\ \upsilon_3 \\ \upsilon_4 L \\ \upsilon_5 \\ \upsilon_6 L \\ \upsilon_7 \\ \upsilon_8 L \end{Bmatrix}\cos\Omega t+\begin{Bmatrix} -\upsilon_5 \\ -\upsilon_6 L \\ -\upsilon_7 \\ -\upsilon_8 L \\ \upsilon_1 \\ \upsilon_2 L \\ \upsilon_3 \\ \upsilon_4 L \end{Bmatrix}\sin\Omega t\right) \tag{3.178}$$

unde

$$\upsilon_1 = 42a_{CL} + 18a_{CR} \qquad \upsilon_5 = 42a_{SL} + 18a_{SR}$$

$$\upsilon_2 = 6a_{CL} + 4a_{CR} \qquad \upsilon_6 = 6a_{SL} + 4a_{SR}$$

$$\upsilon_3 = 18a_{CL} + 42a_{CR} \qquad \upsilon_7 = 18a_{SL} + 42a_{SR}$$

$$-\upsilon_4 = 4a_{CL} + 6a_{CR} \qquad -\upsilon_8 = 4a_{SL} + 6a_{SR}$$

Vectorul forțelor de dezechilibru masic pentru elementul de arbore Timoshenko

După efectuarea calculelor se ajunge la următoarea formă:

$$\{f_S\} = \frac{\mu L \Omega^2}{120(1+K)} \left(\begin{Bmatrix} \upsilon_1 \\ \upsilon_2 L \\ \upsilon_3 \\ \upsilon_4 L \\ \upsilon_5 \\ \upsilon_6 L \\ \upsilon_7 \\ \upsilon_8 L \end{Bmatrix} \cos\Omega t + \begin{Bmatrix} -\upsilon_5 \\ -\upsilon_6 L \\ -\upsilon_7 \\ -\upsilon_8 L \\ \upsilon_1 \\ \upsilon_2 L \\ \upsilon_3 \\ \upsilon_4 L \end{Bmatrix} \sin\Omega t \right) \tag{3.179}$$

unde

$$\upsilon_1 = (42+40K)a_{CL} + (18+20K)a_{CR} \qquad \upsilon_5 = (42+40K)a_{SL} + (18+20K)a_{SR}$$

$$\upsilon_2 = (6+5K)a_{CL} + (4+5K)a_{CR} \qquad \upsilon_6 = (6+5K)a_{SL} + (4+5K)a_{SR}$$

$$\upsilon_3 = (18+20K)a_{CL} + (42+40K)a_{CR} \qquad \upsilon_7 = (18+20K)a_{SL} + (42+40K)a_{SR}$$

$$-\upsilon_4 = (4+5K)a_{CL} + (6+5K)a_{CR} \qquad -\upsilon_8 = (4+5K)a_{SL} + (6+5K)a_{SR}$$

3.1.2. Elemente tronconice de bară cu două noduri

În cele ce urmează se prezintă două tipuri de elemente finite conice, concepute pornind de la elementele finite cilindrice de tip Timoshenko, cu două noduri la capete, cu matrice de masă şi matrice giroscopică coerente.

3.1.2.1. Elementul CON 12

Greenhill, Bickford şi Nelson [70] au extins elementul finit cilindric de tip Timoshenko, la elementul finit conic şi au luat în calcul efectele inerţiei la rotaţie, la translaţie, efectul momentelor giroscopice, a deformaţiilor de forfecare şi de încovoiere, efectul încărcării axiale şi al amortizării interne.

În descrierea elementului CON 12, inspirat din lucrarea [70], se neglijează efectul încărcării axiale şi al amortizării interne.

Elementele conice înlocuiesc elementele cilindrice utilizate la modelarea în trepte a porţiunilor tronconice dintr-un arbore. Astfel, este posibilă compararea celor două tipuri de modelări. Rezultatele obţinute în urma utilizării elementului conic la modelarea rotorilor au fost mai bune în comparaţie cu cele obţinute în urma modelării în trepte a aceluiaşi rotor cu elemente cilindrice.

Elementul CON 12 se bazează pe cel descris în [70]. El are 6 grade de libertate pe nod: deplasarea transversală, rotirea axei neutre şi unghiul de forfecare, în câte două plane ortogonale, rezultând matricele elementului de ordin 12x12. Acestor grade de libertate li se asociază următorul mod de variaţie: pentru deplasarea laterală o variaţie cubică şi pentru deformaţia de forfecare o variaţie liniară.

În teoria de bară Timoshenko [140] se pune o condiţie suplimentară pentru neglijarea efectului inerţiei la rotaţie în ecuaţia diferenţială de echilibru a momentelor încovoietoare, relaţiile (3.76) şi (3.100). În absenţa termenului care ţine cont de inerţia la rotaţie, rotirea secţiunii transversale depinde de deplasarea laterală (altfel acestea sunt independente). Forţa tăietoare este constantă în lungul elementului. Ea este egală cu derivata întâi a momentului încovoietor , ca în cazul static.

Cu funcţia de variaţie de gradul trei presupusă pentru deplasarea laterală, rotirea secţiunii transversale este o funcţie de gradul doi variind cu coordonata longitudinală şi momentul încovoietor variază liniar.

Pentru ca elementul CON 12 să fie compatibil cu programele de calcul de dinamica rotorilor, se face o reducere Guyan [73] pentru condensarea matricelor elementului de la ordinul 12x12 la ordinul de mărime 8x8.

Pentru elementele conice, factorul de forfecare este calculat arbitrar folosind caracteristicile geometrice ale secţiunii transversale de la mijlocul elementului. Ca urmare, se observă că exactitatea analizei cu elemente finite conice depinde de alura elementului şi de alegerea unui diametru „efectiv" pentru calculul constantei de forfecare. O alternativă este utilizarea valorii medii pătratice a diametrelor de la capetele elementului, sau media geometrică a acestora [48]. Aceste variante par să se apropie mai mult de varianta ideală la care se doreşte utilizarea unui număr cât mai mic de elemente conice.

Fie un element finit conic de lungime L, mărginit de nodurile i şi j, cu raza interioară r şi raza exterioară R, ca cel din figura 3.12. Acest element are 12 grade de libertate, câte 6 pe fiecare nod: două translaţii, două rotaţii şi două deformaţii de forfecare.

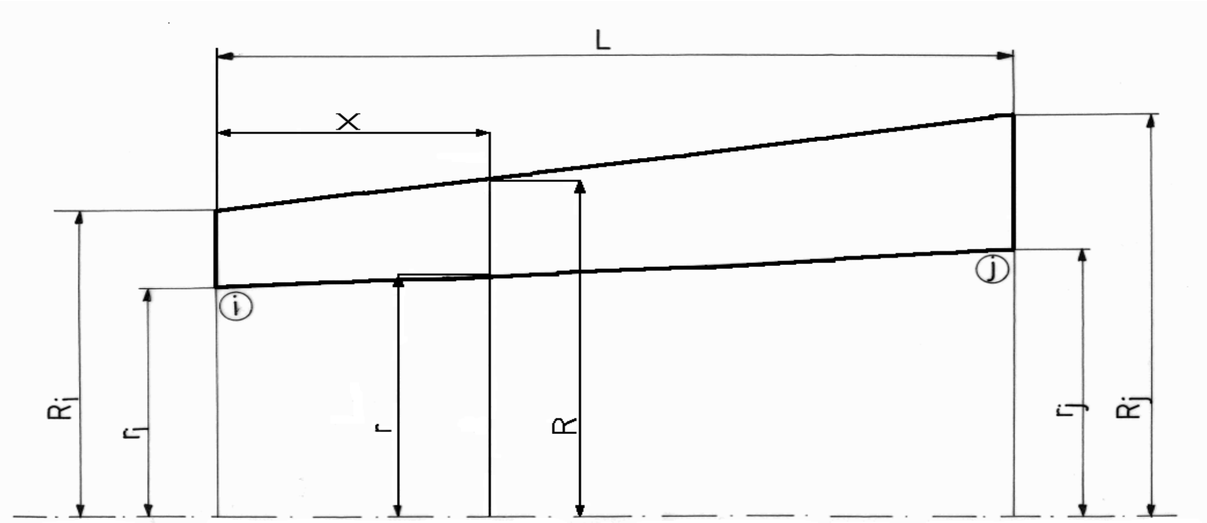


Fig.3.12

Într-o secţiune oarecare, raza interioară şi cea exterioară au următoarele forme:

$$\mathbf{r = r_i(1-\xi) + r_j\xi}$$
$$\mathbf{R = R_i(1-\xi) + R_j\xi.} \tag{3.180}$$

unde ξ reprezintă coordonata adimensională de forma $\xi = \frac{x}{L}$. Sau, făcând notaţiile:

$$\rho = \frac{\mathbf{r_j}}{\mathbf{r_i}} \ \mathbf{si}\ \sigma = \frac{\mathbf{R_j}}{\mathbf{R_i}}, \tag{3.181}$$

expresiile razelor devin următoarele:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_i[1 + (\rho - 1)\xi]$$
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_i[1 + (\sigma - 1)\xi] \quad . \qquad (3.182)$$

Aria secţiunii transversale este:

$$\mathbf{A} = \pi(\mathbf{R}^2 - \mathbf{r}^2) = \mathbf{A}_i(1 + \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2) \qquad (3.183)$$

în care:

$$\mathbf{A}_i = \pi(\mathbf{R}_i^{\,2} - \mathbf{r}_i^{\,2}) \qquad (3.184)$$

$$\alpha_1 = \frac{2[\mathbf{R}_i^{\,2}(\sigma - 1) - \mathbf{r}_i^{\,2}(\rho - 1)]}{\mathbf{R}_i^{\,2} - \mathbf{r}_i^{\,2}} \qquad (3.185)$$

$$\alpha_2 = \frac{[\mathbf{R}_i^{\,2}(\sigma - 1)^2 - \mathbf{r}_i^{\,2}(\rho - 1)^2]}{\mathbf{R}_i^{\,2} - \mathbf{r}_i^{\,2}}. \qquad (3.186)$$

Asemănător se poate scrie şi expresia momentului de inerţie axial al secţiunii:

$$\mathbf{I} = \frac{\pi(\mathbf{D}^4 - \mathbf{d}^4)}{\mathbf{64}} = \frac{\pi(\mathbf{R}^4 - \mathbf{r}^4)}{\mathbf{4}} = \mathbf{I}_i[1 + \delta_1\xi + \delta_2\xi^2 + \delta_3\xi^3 + \delta_4\xi^4] \qquad (3.187)$$

în care:

$$\mathbf{I}_i = \frac{\pi(\mathbf{R}_i^{\,4} - \mathbf{r}_i^{\,4})}{\mathbf{4}} \qquad (3.188)$$

$$\delta_1 = \frac{4[\mathbf{R}_i^{\,4}(\sigma - 1) - \mathbf{r}_i^{\,4}(\rho - 1)]}{\mathbf{R}_i^{\,4} - \mathbf{r}_i^{\,4}} \qquad (3.189)$$

$$\delta_2 = \frac{6\left[R_i^{\ 4}(\sigma-1)^2 - r_i^{\ 4}(\rho-1)^2\right]}{R_i^{\ 4} - r_i^{\ 4}} \tag{3.190}$$

$$\delta_3 = \frac{4\left[R_i^{\ 4}(\sigma-1)^3 - r_i^{\ 4}(\rho-1)^3\right]}{R_i^{\ 4} - r_i^{\ 4}} \tag{3.191}$$

$$\delta_4 = \frac{\left[R_i^{\ 4}(\sigma-1)^4 - r_i^{\ 4}(\rho-1)^4\right]}{R_i^{\ 4} - r_i^{\ 4}}. \tag{3.192}$$

Vectorul deplasărilor pentru un astfel de element de arbore este:

$$\{u^S\}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7 \quad u_8 \quad u_9 \quad u_{10} \quad u_{11} \quad u_{12}\}^T =$$
$$= \{v_i \quad w_i \quad \varphi_i \quad \psi_i \quad v_j \quad w_j \quad \varphi_j \quad \psi_j \quad \gamma_{xy\,i} \quad \gamma_{xz\,i} \quad \gamma_{xy\,j} \quad \gamma_{xz\,j}\}^T \tag{3.193}$$

unde:

$$\varphi = -w' - \gamma_{xz}$$
$$\psi = v' + \gamma_{xy}. \tag{3.194}$$

iar γ_{xy} **si** γ_{xz} reprezintă deformaţiile de forfecare, ca în figura 3.13:

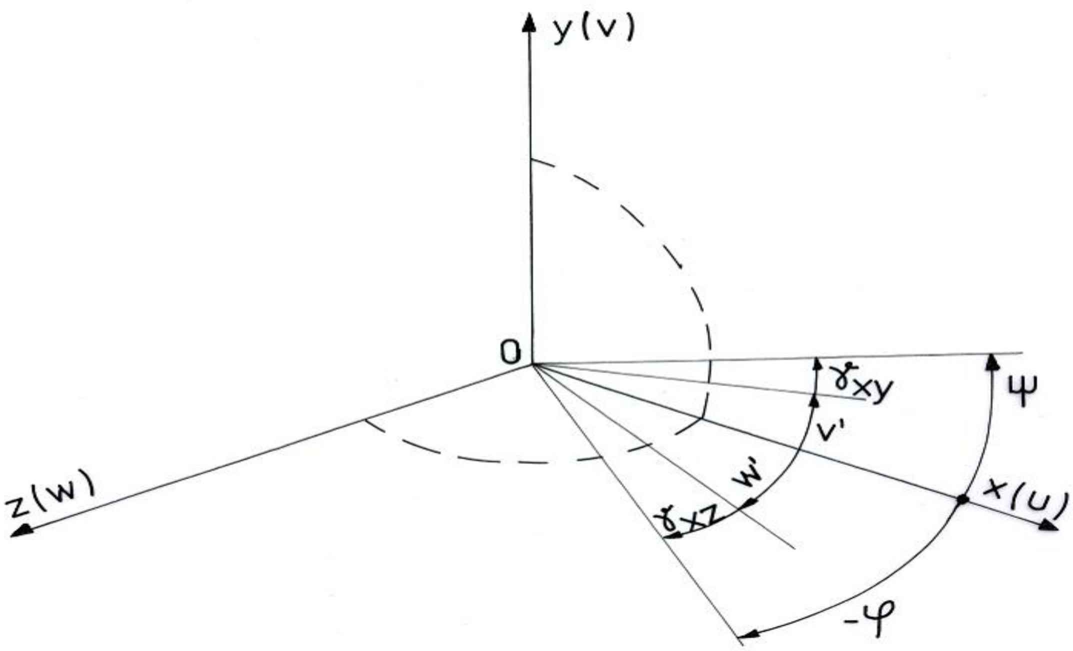


Fig.3.13

- Funcţiile de formă pentru deplasări sunt:

$$[\mathbf{N}]=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & 0 & 0 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{N}_3 & 0 & 0 & \mathbf{N}_4 & -\mathbf{N}_2 & 0 & -\mathbf{N}_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_1 & -\mathbf{N}_2 & 0 & 0 & \mathbf{N}_3 & -\mathbf{N}_4 & 0 & 0 & -\mathbf{N}_2 & 0 & -\mathbf{N}_4 \end{bmatrix} \tag{3.195}$$

unde

$$\begin{cases} \mathbf{N}_1(\xi)=1-3\xi^2+2\xi^3 \\ \mathbf{N}_2(\xi)=\mathbf{L}(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ \mathbf{N}_3(\xi)=3\xi^2-2\xi \\ \mathbf{N}_4(\xi)=\mathbf{L}(-\xi^2+\xi^3) \end{cases} \tag{3.196}$$

sunt, de fapt, funcţiile de formă pentru deplasări din rel.(3.54) deduse pentru elementul cilindric Bernoulli-Euler.

- Funcţiile de formă pentru rotiri:

$$[\tilde{\mathbf{N}}]=\begin{bmatrix} 0 & \tilde{\mathbf{N}}_1 & \tilde{\mathbf{N}}_2 & 0 & 0 & -\tilde{\mathbf{N}}_1 & \tilde{\mathbf{N}}_3 & 0 & 0 & -\tilde{\mathbf{N}}_4 & 0 & -\tilde{\mathbf{N}}_4 \\ -\tilde{\mathbf{N}}_1 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{N}}_2 & \tilde{\mathbf{N}}_1 & 0 & 0 & \tilde{\mathbf{N}}_3 & \tilde{\mathbf{N}}_4 & 0 & \tilde{\mathbf{N}}_4 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.197}$$

unde

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{N}}_1=6(\xi-\xi^2) \\ \tilde{\mathbf{N}}_2=1-4\xi+3\xi^2 \\ \tilde{\mathbf{N}}_3=-2\xi+3\xi^2 \\ \tilde{\mathbf{N}}_4=3\xi-3\xi^2 \end{cases} \tag{3.198}$$

sunt, de fapt, funcţiile de formă pentru rotiri din rel.(3.55) deduse pentru elementul cilindric Bernoulli-Euler.

- Funcţiile de formă pentru deformaţiile de forfecare:

$$[\chi]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_1 & 0 & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_1 & 0 & \chi_2 \end{bmatrix} \tag{3.199}$$

unde

$$\begin{cases} \chi_1 = 1 - \xi \\ \chi_2 = \xi \end{cases} \tag{3.200}$$

Dacă se foloseşte un sistem de referinţă mobil, care se roteşte cu viteza unghiulară de precesie ω, atunci, folosind transformarea de coordonate

$$\{\mathbf{u}^S\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{p}^S\}, \tag{3.201}$$

ecuaţia de mişcare pentru un element de arbore conic se scrie:

$$\left([\mathbf{M_T}] + [\mathbf{M_R}]\right)\{\ddot{\mathbf{p}}^S\} + \left\{\omega\left([\hat{\mathbf{M}}_\mathbf{T}] + (1-\lambda)[\mathbf{G}]\right)\right\}\{\dot{\mathbf{p}}^S\} +$$

$$+ \left\{ [\mathbf{K_B}] - \omega^2\left([\mathbf{M_T}] + (1-2\lambda)[\mathbf{M_R}]\right) \right\}\{\mathbf{p}^S\} = \{\mathbf{Q_C}^S\}$$

(3.202)

în care toate matricele sunt de ordinul 12x12, simetrice, în afară de matricea [G] care este antisimetrică,

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega}, \tag{3.203}$$

iar [R] este o matrice bloc diagonală, în care fiecare element de dimensiuni 2x2 este o matrice de rotaţie:

$$\begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

$[\hat{\mathbf{M}}_\mathbf{T}]$ este o matrice antisimetrică a cărei expresie se dă mai jos.

- **Matricele elementului**

Matricele elementare din această ecuaţie de mişcare au următoarele forme:

- Matricea de rigiditate la încovoiere:

$$[K_B]=\frac{EI_i}{5040L^3}\begin{bmatrix}
(1,1) & & & & & & & & & & & \\
0 & (2,2) & & & & & & & & & & \\
0 & (3,2) & (3,3) & & & & & & & \text{sim} & & \\
(4,1) & 0 & 0 & (4,4) & & & & & & & & \\
(5,1) & 0 & 0 & (5,4) & (5,5) & & & & & & & \\
0 & (6,2) & (6,3) & 0 & 0 & (6,6) & & & & & & \\
0 & (7,2) & (7,3) & 0 & 0 & (7,6) & (7,7) & & & & & \\
(8,1) & 0 & 0 & (8,4) & (8,5) & 0 & 0 & (8,8) & & & & \\
(9,1) & 0 & 0 & (9,4) & (9,5) & 0 & 0 & (9,8) & (9,9) & & & \\
0 & (10,2) & (10,3) & 0 & 0 & (10,6) & (10,7) & 0 & 0 & (10,10) & & \\
(11,1) & 0 & 0 & (11,4) & (11,5) & 0 & 0 & (11,8) & (11,9) & 0 & (11,11) & \\
0 & (12,2) & (12,3) & 0 & 0 & (12,6) & (12,7) & 0 & 0 & (12,10) & 0 & (12,12)
\end{bmatrix}$$

(3.204)

în care

$$(1,1)=60480+30240\delta_1+24192\delta_2+21168\delta_3+19008\delta_4$$

$$(4,1)=L(30240+10080\delta_1+7056\delta_2+6048\delta_3+5472\delta_4)$$

$$(5,1)=(6,2)=-(2,2)=-(5,5)=-(6,6)=-(1,1)$$

$$(8,1)=L(30240+20160\delta_1+171736\delta_2+15120\delta_3+13536\delta_4)$$

$$(9,1)=-L(30240+15120\delta_1+12096\delta_2+10584\delta_3+9504\delta_4)$$

$$(11,1)=(10,2)=(12,2)=-(9,5)=-(11,5)=-(10,6)=-(12,6)=(9,1)$$

$$(3,2)=(5,4)=-(6,3)=-(4,1)$$

$$(7,2)=(8,5)=-(7,6)=-(8,1)$$

$$(3,3)=(4,4)=L^2(20160+5040\delta_1+2688\delta_2+2016\delta_3+1728\delta_4)$$

$$(7,3)=(8,4)=L^2(10080+5040\delta_1+4368\delta_2+4032\delta_3+3744\delta_4)$$

$$(10,3)=L^2(15120+5040\delta_1+3528\delta_2+3024\delta_3+2736\delta_4)$$

$$(12,3)=-(9,4)=-(11,4)=(10,3)$$

$$(7,7)=(8,8)=L^2(20160+15120\delta_1+12768\delta_2+11088\delta_3+9792\delta_4)$$

$$(10,7)=L^2(15120+10080\delta_1+8568\delta_2+7560\delta_3+6768\delta_4)$$

$$(12,7)=-(9,8)=-(11,8)=(10,7)$$

$$(9,9)=L^2(15120+7560\delta_1+6048\delta_2+5292\delta_3+4725\delta_4)$$

$$(11,9)=(10,10)=(12,10)=(11,11)=(12,12)=(9,9)$$

- Matricea de rigiditate la forfecare:

$$[K_S]=\frac{KLGA_i}{120}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & & & \text{sim} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (9,9) & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (10,10) & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (11,9) & 0 & (11,11) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (12,10) & 0 & (12,12) \end{bmatrix}$$

(3.205)

unde

$$(9,9)=(10,10)=(40+10\alpha_1+4\alpha_2)$$

$$(11,9)=(12,10)=(20+10\alpha_1+6\alpha_2)$$

$$(11,11)=(12,12)=(40+30\alpha_1+24\alpha_2)$$

- Matricea de masă de translaţie este:

$$[M_T]=\frac{\mu A_i L}{362880}\begin{bmatrix}
(1,1) & & & & & & & & & & & \\
0 & (2,2) & & & & & & & & & & \\
0 & (3,2) & (3,3) & & & & & & & \text{sim} & & \\
(4,1) & 0 & 0 & (4,4) & & & & & & & & \\
(5,1) & 0 & 0 & (5,4) & (5,5) & & & & & & & \\
0 & (6,2) & (6,3) & 0 & 0 & (6,6) & & & & & & \\
0 & (7,2) & (7,3) & 0 & 0 & (7,6) & (7,7) & & & & & \\
(8,1) & 0 & 0 & (8,4) & (8,5) & 0 & 0 & (8,8) & & & & \\
(9,1) & 0 & 0 & (9,4) & (9,5) & 0 & 0 & (9,8) & (9,9) & & & \\
0 & (10,2) & (10,3) & 0 & 0 & (10,6) & (10,7) & 0 & 0 & (10,10) & & \\
(11,1) & 0 & 0 & (11,4) & (11,5) & 0 & 0 & (11,8) & (11,9) & 0 & (11,11) & \\
0 & (12,2) & (12,3) & 0 & 0 & (12,6) & (12,7) & 0 & 0 & (12,10) & 0 & (12,12)
\end{bmatrix}$$

(3.206)

unde

$$(1,1)=(2,2)=134784+31104\alpha_1+10944\alpha_2$$

$$(4,1)=-(9,1)=-(3,2)=-(10,2)=L(19008+6048\alpha_1+2448\alpha_2)$$

$$(5,1)=(6,2)=46656+23328\alpha_1+13248\alpha_2$$

$$(11,1)=(7,2)=(12,2)=-(8,1)=L(11232+5184\alpha_1+2736\alpha_2)$$

$$(3,3)=L^2(3456+1296\alpha_1+576\alpha_2)$$

$$(10,3)=(4,4)=-(9,4)=(9,9)=(10,10)=(3,3)$$

$$(6,3)=-(5,4)=(9,5)=(10,6)=-L(11232+6048\alpha_1+3600\alpha_2)$$

$$(7,3)=-L^2(2592+1296\alpha_1+720\alpha_2)$$

$$((12,3)=(8,4)=-(11,4)=(10,7)=-(9,8)=(11,9)=(12,10)=(7,3))$$

$$(5,5)=(6,6)=134784+103680\alpha_1+83520\alpha_2$$

$$(8,5)=-(11,5)=-(7,6)=-(12,6)=-L(19008+12960\alpha_1+9360\alpha_2)$$

$$(7,7)=L^2(3456+2160\alpha_1+1440\alpha_2)$$

$$(12,7)=(8,8)=-(11,8)=(11,11)=(12,12)=(7,7)$$

- Matricea de masă de rotaţie este de forma:

$$[M_R]=\frac{\mu I_i}{362880L}\begin{bmatrix}
(1,1) & & & & & & & & & & & \\
0 & (2,2) & & & & & & & & & & \\
0 & (3,2) & (3,3) & & & & & & & \mathrm{sim} & & \\
(4,1) & 0 & 0 & (4,4) & & & & & & & & \\
(5,1) & 0 & 0 & (5,4) & (5,5) & & & & & & & \\
0 & (6,2) & (6,3) & 0 & 0 & (6,6) & & & & & & \\
0 & (7,2) & (7,3) & 0 & 0 & (7,6) & (7,7) & & & & & \\
(8,1) & 0 & 0 & (8,4) & (8,5) & 0 & 0 & (8,8) & & & & \\
(9,1) & 0 & 0 & (9,4) & (9,5) & 0 & 0 & (9,8) & (9,9) & & & \\
0 & (10,2) & (10,3) & 0 & 0 & (10,6) & (10,7) & 0 & 0 & (10,10) & & \\
(11,1) & 0 & 0 & (11,4) & (11,5) & 0 & 0 & (11,8) & (11,9) & 0 & (11,11) & \\
0 & (12,2) & (12,3) & 0 & 0 & (12,6) & (12,7) & 0 & 0 & (12,10) & 0 & (12,12)
\end{bmatrix}$$

(3.207)

unde

$$(1,1)=435456+217728\delta_1+124416\delta_2+77760\delta_3+51840\delta_4$$

$$(4,1)=L(36288+36288\delta_1+25920\delta_2+18144\delta_3+12960\delta_4)$$

$$(5,1)=(6,2)=-(2,2)=-(5,5)=-(6,6)=-(1,1)$$

$$(8,1)=L(36288-10368\delta_2-12960\delta_3-12960\delta_4)$$

$$(9,1)=-L(217728+108864\delta_1+62208\delta_2+38880\delta_3+25920\delta_4)$$

$$(11,1)=(10,2)=(12,1)=-(9,5)=-(11,5)=-(10,6)=-(12,6)=(9,1)$$

$$(3,2)=-(6,3)=(5,4)=-(4,1)$$

$$(7,2)=(8,5)=-(7,6)=-(8,1)$$

$$(3,3)=(4,4)=L^2(48684+12096\delta_1+6912\delta_2+4752\delta_3+3456\delta_4)$$

$$(7,3)=(8,4)=-L^2(12096+6048\delta_1+5184\delta_2+4752\delta_3+4320\delta_4)$$

$$(10,3)=L^2(18144+18144\delta_1+12960\delta_2+9072\delta_3+6480\delta_4)$$

$$(12,3)=(9,4)=-(11,4)=(10,3)$$

$$(7,7)=(8,8)=L^2(48384+36288\delta_1+31104\delta_2+28080\delta_3+25920\delta_4)$$

$$(10,7)=L^2(18144-5184\delta_2-6480\delta_3-6480\delta_4)$$

$$(12,7)=-(9,8)=-(11,8)=(10,7)$$

$$(9,9)=L^2(108864+54432\delta_1+31104\delta_2+19440\delta_3+12960\delta_4)$$

$$(11,9)=(10,10)=(12,10)=(11,11)=(12,12)=(9,9)$$

- Matricea giroscopică este:

$$[G]=\frac{\mu I_i}{362880L}\begin{bmatrix}
0 & & & & & & & & & & & \\
(2,1) & 0 & & & & & & & & & & \\
(3,1) & 0 & 0 & & & & & & \text{anti} & \text{sim} & & \\
0 & (4,2) & (4,3) & 0 & & & & & & & & \\
0 & (5,2) & (5,3) & 0 & 0 & & & & & & & \\
(6,1) & 0 & 0 & (6,4) & (6,5) & 0 & & & & & & \\
(7,1) & 0 & 0 & (7,4) & (7,5) & 0 & 0 & & & & & \\
0 & (8,2) & (8,3) & 0 & 0 & (8,6) & (8,7) & 0 & & & & \\
0 & (9,2) & (9,3) & 0 & 0 & (9,6) & (9,7) & 0 & 0 & & & \\
(10,1) & 0 & 0 & (10,4) & (10,5) & 0 & 0 & (10,8) & (10,9) & 0 & & \\
0 & (11,2) & (11,3) & 0 & 0 & (11,6) & (11,7) & 0 & 0 & (11,10) & 0 & \\
(12,1) & 0 & 0 & (12,4) & (12,5) & 0 & 0 & (12,8) & (12,9) & 0 & (12,11) & 0
\end{bmatrix}$$

(3.208)

unde

$$(2,1)=879012+435456\delta_1+248832\delta_2+155520\delta_3+103680\delta_4$$

$$(3,1)=-(72576+72576\delta_1+51840\delta_2+36288\delta_3+25920\delta_4)$$

$$(6,1)=-(5,2)=-(6,5)=-(2,1)$$

$$(7,1)=L(-72576+20736\delta_2+25920\delta_3+25920\delta_4)$$

$$(10,1)=-L(435456+217728\delta_1+124416\delta_2+77760\delta_3+51840\delta_4)$$

$$(12,1)=-(9,2)=-(11,2)=-(10,5)=-(12,5)=(9,6)=(11,6)=(10,1)$$

$$(4,2)=(5,3)=(6,4)=(3,1)$$

$$(8,2)=-(7,5)=-(8,6)=(7,1)$$

$$(4,3)=L^2(96768+24192\delta_1+13824\delta_2+9504\delta_3+6912\delta_4)$$

$$(8,3)=-(7,4)=-L^2(24192+12096\delta_1+10368\delta_2+9504\delta_3+8640\delta_4)$$

$$(9,3)=-L^2(36288+36288\delta_1+25920\delta_2+18144\delta_3+12960\delta_4)$$

$$(11,3)=(10,4)=(12,4)=(9,3)$$

$$(8,7)=L^2(96768+72576\delta_1+62208\delta_2+56160\delta_3+51840\delta_4)$$

$$(9,7)=L^2(-36288+10368\delta_2+12960\delta_3+12960\delta_4)$$

$$(11,7)=(10,8)=(12,8)=(9,7)$$

$$(10,9)=L^2(217728+108864\delta_1+62208\delta_2+38880\delta_3+25920\delta_4)$$

$$(12,9)=-(11,10)=(12,11)=(10,9)$$

- Matricea circulatorie a elementului:

$$[K_C]=\frac{EI_i}{5040L^3}\begin{bmatrix}
0 & & & & & & & & & & & \\
(2,1) & 0 & & & & & & & & & & \\
(3,1) & 0 & 0 & & & & & & \text{anti} & \text{sim} & & \\
0 & (4,2) & (4,3) & 0 & & & & & & & & \\
0 & (5,2) & (5,3) & 0 & 0 & & & & & & & \\
(6,1) & 0 & 0 & (6,4) & (6,5) & 0 & & & & & & \\
(7,1) & 0 & 0 & (7,4) & (7,5) & 0 & 0 & & & & & \\
0 & (8,2) & (8,3) & 0 & 0 & (8,6) & (8,7) & 0 & & & & \\
0 & (9,2) & (9,3) & 0 & 0 & (9,6) & (9,7) & 0 & 0 & & & \\
(10,1) & 0 & 0 & (10,4) & (10,5) & 0 & 0 & (10,8) & (10,9) & 0 & & \\
0 & (11,2) & (11,3) & 0 & 0 & (11,6) & (11,7) & 0 & 0 & (11,10) & 0 & \\
(12,1) & 0 & 0 & (12,4) & (12,5) & 0 & 0 & (12,8) & (12,9) & 0 & (12,11) & 0
\end{bmatrix} \tag{3.209}$$

unde

$$(2,1) = -(60480 + 30240\delta_1 + 24192\delta_2 + 21168\delta_3 + 19008\delta_4)$$

$$(3,1) = L(30240 + 10080\delta_1 + 7056\delta_2 + 6048\delta_3 + 5472\delta_4)$$

$$(6,1) = -(5,2) = -(6,5) = -(2,1)$$

$$(7,1) = 30240 + 20160\delta_1 + 17136\delta_2 + 15120\delta_3 + 13536\delta_4$$

$$(10,1) = L(30240 + 15120\delta_1 + 12096\delta_2 + 10584\delta_3 + 9504\delta_4)$$

$$(12,1) = -(9,2) = -(11,2) = -(10,5) = -(12,5) = (9,6) = (11,6) = (10,1)$$

$$(4,2) = (5,3) = (6,4) = (3,1)$$

$$(8,2) = -(7,5) = -(8,6) = (7,1)$$

$$(4,3) = -L^2(20160 + 5040\delta_1 + 2688\delta_2 + 2016\delta_3 + 1728\delta_4)$$

$$(8,3) = -(7,4) = -L^2(10080 + 5040\delta_1 + 4368\delta_2 + 4032\delta_3 + 3744\delta_4)$$

$$(9,3) = L^2(15120 + 5040\delta_1 + 3528\delta_2 + 3024\delta_3 + 2736\delta_4)$$

$$(11,3) = (10,4) = (12,4) = (9,3)$$

$$(8,7) = -L^2(20160 + 15120\delta_1 + 12768\delta_2 + 11088\delta_3 + 9792\delta_4)$$

$$(9,7) = L^2(15120 + 10080\delta_1 + 8568\delta_2 + 7560\delta_3 + 6768\delta_4)$$

$$(11,7) = (10,8) = (12,8) = (9,7)$$

$$(10,9) = -L^2(15120 + 7560\delta_1 + 6048\delta_2 + 5292\delta_3 + 4752\delta_4)$$

$$(12,9) = -(11,10) = (12,11) = (10,9)$$

- Matricea de masă $\left[\hat{M}_T\right]$ are forma:

$$\left[\hat{M}_T\right]=\frac{\mu A_i L}{362880}\begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ (2,1) & 0 & & & & & & & & & & \\ (3,1) & 0 & 0 & & & & & & \text{anti} & \text{sim} & & \\ 0 & (4,2) & (4,3) & 0 & & & & & & & & \\ 0 & (5,2) & (5,3) & 0 & 0 & & & & & & & \\ (6,1) & 0 & 0 & (6,4) & (6,5) & 0 & & & & & & \\ (7,1) & 0 & 0 & (7,4) & (7,5) & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & (8,2) & (8,3) & 0 & 0 & (8,6) & (8,7) & & & & & \\ 0 & (9,2) & (9,3) & 0 & 0 & (9,6) & (9,7) & 0 & & & & \\ (10,1) & 0 & 0 & (10,4) & (10,5) & 0 & 0 & (10,8) & (10,9) & & & \\ 0 & (11,2) & (11,3) & 0 & 0 & (11,6) & (11,7) & 0 & 0 & (11,10) & & \\ (12,1) & 0 & 0 & (12,4) & (12,5) & 0 & 0 & (12,8) & (12,9) & 0 & (12,11) & 0 \end{bmatrix}$$

(3.210)

unde

$$(2,1)=(6,5)=269568+62208\alpha_1+21888\alpha_2$$

$$(3,1)=(10,1)=(4,2)=-(9,2)=-L(38016+12096\alpha_1+4896\alpha_2)$$

$$(6,1)=-(5,2)=93312+46656\alpha_1+26496\alpha_2$$

$$(7,1)=(12,1)=(8,2)=-(11,2)=L(22464+10368\alpha_1+5472\alpha_2)$$

$$(4,3)=-(9,3)=-(10,4)=(10,9)=L^2(6912+2592\alpha_1+1152\alpha_2)$$

$$(5,3)=(6,4)=-(10,5)=(9,6)=L(22464+12096\alpha_1+7200\alpha_2)$$

$$(8,3)=(12,9)=-L^2(5184+2592\alpha_1+1440\alpha_2)$$

$$(11,3)=-(8,3)$$

$$(7,4)=(12,4)=(9,7)=(10,8)=(11,10)=(11,3)$$

$$(7,5)=(12,5)=(8,6)=-(11,6)=L(38016+25920\alpha_1+18720\alpha_2)$$

$$(8,7)=-(11,7)=-(12,8)=(12,11)=L^2(6912+4320\alpha_1+2880\alpha_2)$$

- Vectorul forţelor de dezechilibru masic:

$$\left\{\mathbf{Q_C}^{\mathbf{S}}\right\} = \frac{\mathbf{\Omega \mu A_i}}{\mathbf{5040}}\left\{\mathbf{Q1} \quad \mathbf{Q2} \quad \mathbf{Q3} \quad \dots \quad \dots \quad \mathbf{Q12}\right\}^{\mathbf{T}} \tag{3.211}$$

unde

$$\mathbf{Q1 = \varepsilon_i\left(1764 + 420\alpha_1 + 156\alpha_2\right) + \varepsilon_j\left(756 + 336\alpha_1 + 156\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q2 = \zeta_i\left(1764 + 420\alpha_1 + 156\alpha_2\right) + \zeta_j\left(756 + 336\alpha_1 + 156\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q3 = -L\zeta_i\left(252 + 84\alpha_1 + 36\alpha_2\right) - L\zeta_j\left(168 + 84\alpha_1 + 48\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q4 = L\varepsilon_i\left(252 + 84\alpha_1 + 36\alpha_2\right) + L\varepsilon_j\left(168 + 84\alpha_1 + 48\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q5 = \varepsilon_i\left(756 + 420\alpha_1 + 264\alpha_2\right) + \varepsilon_j\left(1764 + 1344\alpha_1 + 1080\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q6 = \zeta_i\left(756 + 420\alpha_1 + 264\alpha_2\right) + \zeta_j\left(1764 + 1344\alpha_1 + 1080\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q7 = L\zeta_i\left(168 + 84\alpha_1 + 48\alpha_2\right) + L\zeta_j\left(252 + 168\alpha_1 + 120\alpha_2\right)}$$

$$\mathbf{Q8 = -L\varepsilon_i\left(168 + 84\alpha_1 + 48\alpha_2\right) - L\varepsilon_j\left(252 + 168\alpha_1 + 120\alpha_2\right)}$$

Q9=-Q4

Q10=Q3

Q11=-Q8

Q12=Q7

în care

$\boldsymbol{\varepsilon}$ şi $\boldsymbol{\zeta}$ reprezintă coordonatele centrului de masă excentric în planele perpendiculare pe nodurile *i* şi *j* ale elementului.

3.1.2.2. Elementul CON 8

În lucrarea [58], Genta şi Gugliotta prezintă un element de grindă conic axial simetric, având secţiunea transversală circulară sau inelară, bazat pe teoria de bară Timoshenko. Acest element are două grade de libertate complexe pe fiecare nod şi autorii îl consideră mai eficient şi preferabil de utilizat. Cu toate că notaţia complexă folosită aici devine foarte greoaie, dacă întregul sistem nu este axial simetric, metoda descrisă poate fi uşor extinsă la rotori axiali simetrici pe suporţi axial nesimetrici, dublând numărul ecuaţiilor şi rearanjând matricele.

La elementul conic CON 8, bazat pe [58] deformaţiile de încovoiere şi de forfecare sunt cuplate şi astfel sunt incluse în analiza arborelui şi gradele de libertate suplimentare. Aceasta este baza în descrierea elementului conic CON 8. El are doar patru grade de libertate pe nod, deplasarea laterală şi rotirea secţiunii transversale în două plane perpendiculare şi astfel, acest element se poate implementa direct într-un program de calcul cu elemente finite cilindrice, ceea ce constituie un real avantaj. De fapt elementul CON 8 poate înlocui elementul cilindric, acesta din urmă devenind un caz particular.

Geometria elementului rezultă din expresii polinomiale. Acestea sunt utilizate pentru determinarea matricelor elementului şi includ efectele inerţiei la rotaţie şi la translaţie, a cuplului giroscopic, a deformaţiilor de forfecare şi de încovoiere. Matricea de masă şi matricea giroscopică sunt matrice coerente de ordin 8x8. Matricea de rigiditate pentru elementul CON 8 este aceeaşi cu matricea obţinută după condensarea elementului CON 12. Utilizând o aranjare convenabilă a gradelor de libertate în vectorul coordonatelor nodale, se obţin submatrici simple de ordin 4x4 [140].

Funcţiile de formă, bazate pe funcţiile de formă pentru elementul de grindă Timoshenko, conţin constanta de forfecare, care este proporţională cu unghiul de forfecare, acesta fiind presupus a fi constant în lungul elementului. Constanta de forfecare K este funcţie de modulul de elasticitate longitudinal, de modulul de elasticitate transversal, de caracteristicile geometrice ale elementului şi de factorul de forfecare χ. Factorul de forfecare este funcţie de coeficientul lui Poisson υ şi de raza interioară r şi de raza exterioară R a arborelui.

Elementul conic CON 8 este prezentat în Figura 3.14. Acesta este un element de secţiune circulară sau inelară având grosimea liniar variabilă, lungimea L şi nodurile de la capete notate cu i şi j.

Cu notaţia arătată în figură, expresiile pentru aria A şi momentele de inerţie transversal I_t şi polar I_p ale secţiunii transversale sunt:

$$\mathbf{A(\xi) = A_i(1+\alpha_1\xi+\beta_1\xi^2)}, \tag{3.212}$$

$$\mathbf{I_t(\xi) = I_{ti}(1+\alpha_2\xi+\beta_2\xi^2+\gamma_2\xi^3+\delta_2\xi^4)}, \tag{3.213}$$

$$\mathbf{I_p = 2I_t},\tag{3.214}$$

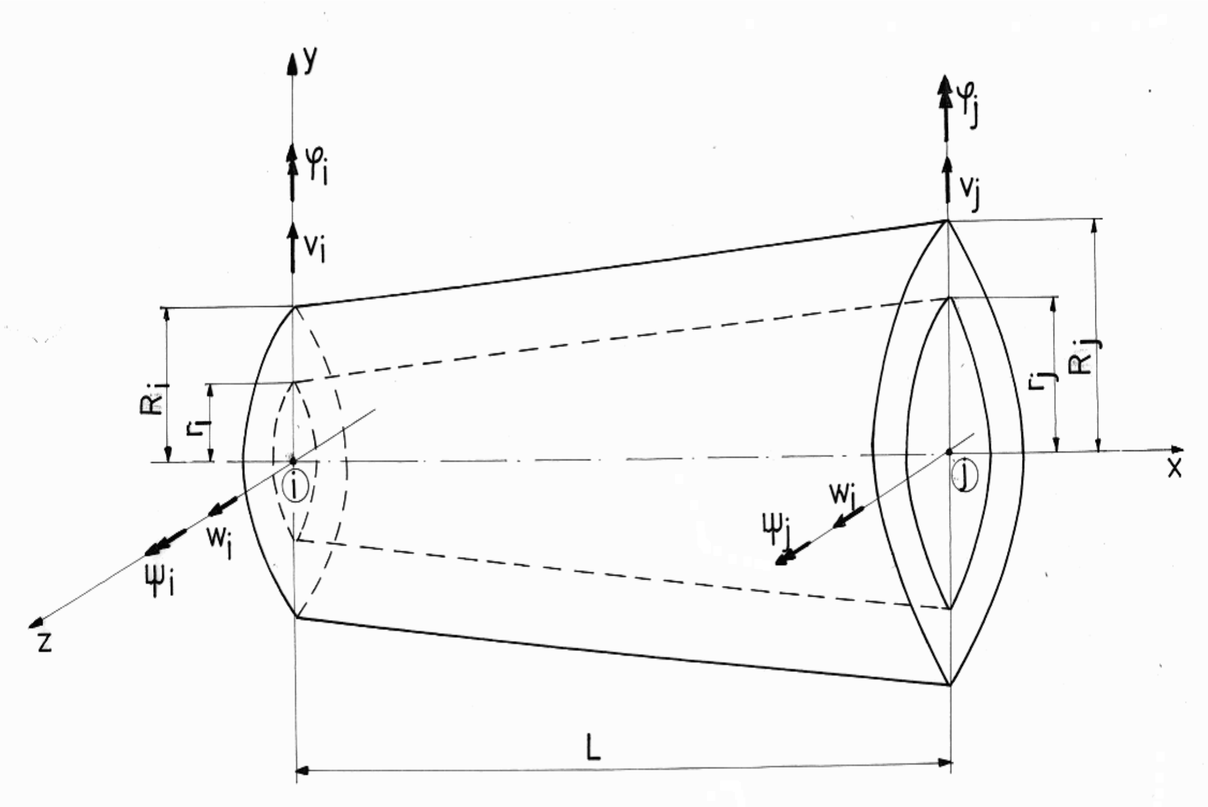


Fig.3.14

unde coordonata adimensională ξ este de forma: $\boldsymbol{\xi = \frac{x}{L}}$. (3.215)

Coeficienţii $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2$ depind de geometria elementului şi au următoarele expresii:

$$\alpha_1 = \frac{2\pi(R_i\Delta R - r_i\Delta r)}{A_i},\tag{3.216}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi(\Delta R^2 - \Delta r^2)}{A_i},\tag{3.217}$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi(R_i{}^3\Delta R - r_i{}^3\Delta r)}{I_{ti}},\tag{3.218}$$

$$\beta_2 = \frac{3\pi\left(R_i^{\,2}\Delta R^2 - r_i^{\,2}\Delta r^2\right)}{2I_{ti}}, \qquad (3.219)$$

$$\gamma_2 = \frac{\pi\left(R_i \Delta R^3 - r_i \Delta r^3\right)}{I_{ti}}, \qquad (3.220)$$

$$\delta_2 = \frac{\pi\left(\Delta R^4 - \Delta r^4\right)}{4I_{ti}}, \qquad (3.221)$$

unde

$$\Delta R = R_j - R_i, \qquad \Delta r = r_j - r_i, \qquad (3.222)$$

în care R şi r reprezintă raza exterioară, respectiv raza interioară a secţiunii transversale.

Matricele elementului

Deplasările elementului pot fi exprimate, în notaţii complexe astfel:

$$\left\{\overline{u}^s\right\} = \begin{Bmatrix} v + iw \\ \psi - i\varphi \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ \tilde{N} \end{bmatrix} \left\{\overline{q}^s\right\}. \qquad (3.223)$$

Vectorul $\left\{\overline{q}^s\right\}$reprezintă coordonatele generalizate complexe şi este de forma:

$$\left\{\overline{q}^s\right\} = \begin{Bmatrix} v_i + iw_i \\ \psi_i - i\varphi_i \\ v_j + iw_j \\ \psi_j - i\varphi_j \end{Bmatrix}. \qquad (3.224)$$

Funcţiile de formă $\lfloor N \rfloor$ şi $\lfloor \tilde{N} \rfloor$ sunt aceleaşi cu cele folosite pentru elementul de grindă cilindric tip Timoshenko:

$$\lfloor N \rfloor = \lfloor N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \rfloor,$$

$$\lfloor \tilde{N} \rfloor = \lfloor \tilde{N}_1 \quad \tilde{N}_2 \quad \tilde{N}_3 \quad \tilde{N}_4 \rfloor.$$

Expresiile acestora sunt date în relaţiile (3.122) şi (3.123). Ca şi în aceste relaţii, valoarea constantei K este

$$\mathbf{K = \frac{12EI}{G\chi AL^2}}$$

şi poate fi calculată utilizând caracteristicile geometrice A, I şi χ ale secţiunii transversale de la mijlocul elementului. Coeficientul de forfecare χ este dat de relaţiile(3.59), (3.60) [48].

Submatricea de rigiditate [k^S], submatricea de masă [m^S] şi submatricea giroscopică [g^S] se definesc astfel:

$$\left[\mathbf{k}^S\right]=\frac{\mathbf{E}}{\mathbf{L}}\int_0^L \mathbf{I}\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\xi}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor^T\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\xi}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor\right)\mathbf{d}\xi+\mathbf{GL}\int_0^L\chi\mathbf{A}\left[\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\xi}\lfloor\mathbf{N}\rfloor\right]^T\left[\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor-\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\xi}\lfloor\mathbf{N}\rfloor\right]\mathbf{d}\xi, \tag{3.225}$$

$$\left[\mathbf{m}^S\right]=\left[\mathbf{m_T}^S\right]+\left[\mathbf{m_R}^S\right]=\rho\mathbf{L}\left(\int_0^L\mathbf{A}\lfloor\mathbf{N}\rfloor^T\lfloor\mathbf{N}\rfloor\mathbf{d}\xi+\int_0^L\mathbf{I}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor^T\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor\mathbf{d}\xi\right), \tag{3.226}$$

$$\left[\mathbf{g}^S\right]=\rho\mathbf{L}\int_0^L\mathbf{I_p}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor^T\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor\mathbf{d}\xi=2\left[\mathbf{m_R}^S\right], \tag{3.227}$$

unde ρ este densitatea materialului.

În această situaţie submatricea giroscopică este simetrică, ceea ce constituie un avantaj.

Vectorul forţelor pentru distribuţia dezechilibrului static $\bar{\varepsilon}(\xi)$ şi pentru distribuţia dezechilibrului dinamic $\bar{\theta}(\xi)$ este

$$\left\{\bar{\mathbf{f}}^S\right\}=\omega^2\left\{\rho\mathbf{L}\int_0^L\mathbf{A}\lfloor\mathbf{N}\rfloor^T\bar{\varepsilon}\mathbf{d}\xi-\int_0^L\mathbf{I}\lfloor\tilde{\mathbf{N}}\rfloor^T\bar{\theta}\mathbf{d}\xi\right\}, \tag{3.228}$$

unde **Ω** reprezintă viteza unghiulară a arborelui.

Introducând funcţiile de formă în expresiile de mai sus şi rezolvând integralele, se găsesc următoarele expresii pentru submatricele elementului conic CON 8:

$$\left[k^S\right]=\frac{EI_i}{105L^3(1+K)^2}\begin{bmatrix} k_1 & Lk_2 & -k_1 & Lk_3 \\ & L^2k_4 & -Lk_2 & L^2k_5 \\ & & k_1 & -Lk_2 \\ & \text{sim} & & L^2k_6 \end{bmatrix}+$$

$$+\frac{G\chi A_iK^2}{12L(1+K)^2}\begin{bmatrix} k_7 & Lk_8 & -k_7 & Lk_8 \\ & L^2k_9 & -Lk_8 & L^2k_9 \\ & & k_7 & Lk_8 \\ & \text{sim} & & L^2k_9 \end{bmatrix}, \qquad (3.229)$$

unde

$$k_1 = 1260 + 630\alpha_2 + 504\beta_2 + 441\gamma_2 + 396\delta_2,$$

$$k_2 = 630 + 210\alpha_2 + 147\beta_2 + 126\gamma_2 + 114\delta_2 - k(105\alpha_2 + 105\beta_2 + 94\cdot 5\gamma_2 + 84\delta_2)$$

$$k_3 = 630 + 420\alpha_2 + 357\beta_2 + 315\gamma_2 + 282\delta_2 + k(105\alpha_2 + 105\beta_2 + 94\cdot 5\gamma_2 + 84\delta_2)$$

$$k_4 = 420 + 210k + 105k^2 + \alpha_2(105 + 52\cdot 5k^2) + \beta_2(56 - 35k + 35k^2) + \\ + \gamma_2(42 - 42k + 26\cdot 25k^2) + \delta_2(36 - 42k + 21k^2),$$

$$k_5 = 210 - 210k - 105k^2 - \alpha_2(105 - 105k - 52\cdot 5k^2) + \beta_2(91 - 70k - 35k^2) + \\ + \gamma_2(84 - 52\cdot 5k - 26\cdot 25k^2) + \delta_2(78 - 42k - 21k^2),$$

$$k_6 = 420 + 210k + 105k^2 + \alpha_2(315 + 210k + 52\cdot 5k^2) + \beta_2(266 + 175k + 35k^2) + \\ + \gamma_2(231 + 147k + 26\cdot 25k^2) + \delta_2(204 + 126k + 21k^2),$$

$$k_7 = (12 + 6\alpha_1 + 4\beta_1),$$

$$k_8 = 6 + 3\alpha_1 + 2\beta_1,$$

$$k_9 = 3 + 1\cdot 5\alpha_1 + \beta_1.$$

$$\left[m_T{}^S\right]=\frac{\rho A_i L}{1260(1+K)^2}\begin{bmatrix} m_1 & Lm_2 & m_3 & -Lm_4 \\ & L^2m_5 & Lm_6 & -L^2m_7 \\ & & m_8 & -Lm_9 \\ & \text{sim} & & L^2m_{10} \end{bmatrix}, \qquad (3.230)$$

unde

$$m_1=\left(468+882k+420k^2\right)+\alpha_1\left(108+210k+105k^2\right)+\beta_1\left(38+78k+42k^2\right),$$

$$m_2=\left(66+115\cdot 5k+52\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(21+40\cdot 5k+21k^2\right)+\beta_1\left(8\cdot 5+18k+10\cdot 5k^2\right)$$

$$m_3=\left(162+378k+210k^2\right)+\alpha_1\left(81+189k+105k^2\right)+\beta_1\left(46+111k+63k^2\right),$$

$$m_4=\left(39+94\cdot 5k+52\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(18+40\cdot 5k+21k^2\right)+\beta_1\left(9\cdot 5+21k+10\cdot 5k^2\right)$$

$$m_5=\left(12+21k+10\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(4\cdot 5+9k+5\cdot 25k^2\right)+\beta_1\left(2+4\cdot 5k+3k^2\right),$$

$$m_6=\left(39+94\cdot 5k+52\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(21+54k+31\cdot 5k^2\right)+\beta_1\left(12\cdot 5+34\cdot 5k+21k^2\right)$$

$$m_7=\left(9+21k+10\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(4\cdot 5+10\cdot 5k+5\cdot 25k^2\right)+\beta_1\left(2\cdot 5+6k+3k^2\right),$$

$$m_8=\left(486+882k+420k^2\right)+\alpha_1\left(360+672k+315k^2\right)+\beta_1\left(290+540k+252k^2\right)$$

$$m_9=\left(66+115\cdot 5k+52\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(45+75k+31\cdot 5k^2\right)+\beta_1\left(32\cdot 5+52\cdot 5k+21k^2\right)$$

$$m_{10}=\left(12+21k+10\cdot 5k^2\right)+\alpha_1\left(7\cdot 5+12k+5\cdot 25k^2\right)+\beta_1\left(5+7\cdot 5k+3k^2\right).$$

$$\left[m_R{}^S\right]=\frac{\rho I_i}{210L(1+K)^2}\begin{bmatrix} m_{11} & Lm_{12} & -m_{11} & Lm_{13} \\ & L^2m_{14} & -Lm_{12} & -L^2m_{15} \\ & & m_{11} & -Lm_{13} \\ & \text{sim} & & L^2m_{16} \end{bmatrix}, \qquad (3.231)$$

unde

$$\mathbf{m_{11} = 252 + 126\alpha_2 + 72\beta_2 + 45\gamma_2 + 30\delta_2},$$

$$\mathbf{m_{12} = 21 - 105k + \alpha_2(21 - 42k) + \beta_2(15 - 21k) + \gamma_2(10 \cdot 5 - 12k) + \delta_2(7 \cdot 5 - 7 \cdot 5k)}$$

$$\mathbf{m_{13} = 21 - 105k - 63\alpha_2 k - \beta_2(6 + 42k) - \gamma_2(7 \cdot 5 + 30k) - \delta_2(7 \cdot 5 + 22 \cdot 5k)},$$

$$\mathbf{m_{14} = 28 + 35k + 70k^2 + \alpha_2(7 - 7k + 17 \cdot 5k^2) + \beta_2(4 - 7k + 7k^2) + }$$
$$\mathbf{+\gamma_2(2 \cdot 75 - 5k + 3 \cdot 5k^2) + \delta_2(2 - 3 \cdot 5k + 2k^2)},$$

$$\mathbf{m_{15} = 7 + 35k - 35k^2 + \alpha_2(3 \cdot 5 + 17 \cdot 5k - 17 \cdot 5k^2) + \beta_2(3 + 10 \cdot 5k - 10 \cdot 5k^2) + }$$
$$\mathbf{+\gamma_2(2 \cdot 75 + 7k - 7k^2) + \delta_2(2 \cdot 5 + 5k - 5k^2)},$$

$$\mathbf{m_{16} = 28 + 35k + 70k^2 + \alpha_2(21 + 42k + 52 \cdot 5k^2) + \beta_2(18 + 42k + 42k^2) + }$$
$$\mathbf{+\gamma_2(16 \cdot 25 + 40k + 35k^2) + \delta_2(15 + 37 \cdot 5k + 30k^2)}.$$

$$\mathbf{[g^S] = 2[m_R{}^S]}, \tag{3.232}$$

Presupunând o distribuţie liniară a dezechilibrului, vectorul forţelor nodale devine:

$$\mathbf{\{\bar{f}^S\} = \frac{\rho\omega^2}{120(1+K)} A_i L [a] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi i} + i\varepsilon_{\eta i} \\ \varepsilon_{\xi j} + i\varepsilon_{\eta j} \end{Bmatrix} - I_i [b] \begin{Bmatrix} \theta_{\eta i} - i\theta_{\xi i} \\ \theta_{\eta j} - i\theta_{\xi j} \end{Bmatrix}}, \tag{3.233}$$

unde elementele matricelor [a] şi [b] sunt:

$$\mathbf{a_{11} = 42 + 40K + 10\alpha_1(1+K) + \beta_1\left(\frac{26}{7} + 4K\right)},$$

$$\mathbf{a_{12} = 18 + 20K + \alpha_1(8 + 10K) + \beta_1\left(\frac{30}{7} + 6K\right)},$$

$$\mathbf{a_{21} = L\left[6 + 5K + 2\alpha_1(1+K) + \beta_1\left(\frac{6}{7} + K\right)\right]},$$

$$\mathbf{a_{22}=L\left[4+5K+\alpha_1(2+3K)+\beta_1\left(\frac{8}{7}+2K\right)\right]},$$

$$\mathbf{a_{31}=18+20K+10\alpha_1(1+K)+\beta_1\left(\frac{44}{7}+6K\right)},$$

$$\mathbf{a_{32}=42+40K+\alpha_1(32+30K)+\beta_1\left(\frac{180}{7}+24K\right)},$$

$$\mathbf{a_{41}=-L\left[4+5K+2\alpha_1(1+K)+\beta_1\left(\frac{8}{7}+K\right)\right]},$$

$$\mathbf{a_{42}=-L\left[6+5K+\alpha_1(4+3K)+\beta_1\left(\frac{20}{7}+2K\right)\right]},$$

$$\mathbf{b_{11}=-\left(60+24\alpha_2+12\beta_2+\frac{48}{7}\gamma_2+\frac{30}{7}\delta_2\right)},$$

$$\mathbf{b_{12}=-\left(60+36\alpha_2+24\beta_2+\frac{120}{7}\gamma_2+\frac{90}{7}\delta_2\right)},$$

$$\mathbf{b_{21}=L\left[10+40K+\alpha_2(-2+10K)+\beta_2(-2+4K)+\gamma_2\left(\frac{-10}{7}+2K\right)+\delta_2\left(-1+\frac{8}{7}K\right)\right]}$$

$$\mathbf{b_{22}=L\left[-10+20K+\alpha_2(-8+10K)+\beta_2(-6+6K)+\gamma_2\left(-\frac{32}{7}+4K\right)+\delta_2\left(-\frac{25}{7}+\frac{20}{7}K\right)\right]}$$

$b_{31}=-b_{11}$, $\qquad b_{32}=-b_{12}$,

$$\mathbf{b_{41}=L\left[-10+20K+\alpha_2(-2+10K)+6\beta_2K+\gamma_2\left(\frac{4}{7}+4K\right)+\delta_2\left(\frac{5}{7}+\frac{20}{7}K\right)\right]},$$

$$\mathbf{b}_{42} = \mathbf{L}\left[\mathbf{10} + \mathbf{40K} + \alpha_2(\mathbf{12} + \mathbf{30K}) + \beta_2(\mathbf{12} + \mathbf{24K}) + \gamma_2\left(\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{7}} + \mathbf{20K}\right) + \delta_2\left(\frac{\mathbf{75}}{\mathbf{7}} + \frac{\mathbf{120}}{\mathbf{7}}\mathbf{K}\right)\right]$$

Elementul conic de tip CON 8 poate fi folosit şi pentru rotorii axial nesimetrici, sau când prezenţa lagărelor introduce elemente nesimetrice în matricele de rigiditate şi de amortizare. Dacă se foloseşte o notaţie convenţională bazată pe coordonate reale şi gradele de libertate sunt descrise în următoarea ordine

$$\{u^S\} = \{v_i \quad \psi_i \quad v_j \quad \psi_j \quad w_i \quad -\varphi_i \quad w_j \quad -\varphi_j\}^T \tag{3.234}$$

atunci ecuaţia de mişcare se poate scrie astfel:

$$\begin{bmatrix} [M_y] & [0] \\ [0] & [M_z] \end{bmatrix}\{\ddot{u}^S\} + \omega\begin{bmatrix} [0] & [G] \\ -[G] & [0] \end{bmatrix}\{\dot{u}^S\} + \begin{bmatrix} [C_y] & [C_{yz}] \\ [C_{zy}] & [C_z] \end{bmatrix}\{\dot{u}^S\} + \begin{bmatrix} [K_y] & [K_{yz}] \\ [K_{zy}] & [K_z] \end{bmatrix}\{u^S\} +$$

$$+\omega\begin{bmatrix} [0] & [C_r] \\ -[C_r] & [0] \end{bmatrix}\{\dot{u}^S\} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}(\{f\}e^{i\omega t}) \\ \mathrm{Im}(\{f\}e^{i\omega t}) \end{Bmatrix}. \tag{3.235}$$

Când elementul are o simetrie axială, matricele cu indicele y şi z sunt egale şi coincid cu cele obţinute aici, iar matricele cu indicele yz dispar. Matricele asamblate nu au aceste proprietăţi. Matricea globală giroscopică este acum antisimetrică.

Vectorul deplasărilor $\{u^S\}$ este uşor diferit de cel utilizat în mod normal: $(-\varphi)$ a fost, de fapt, ales ca rotire în jurul axei y în loc de (φ).

Concluzie: Utilizarea elementului finit conic de tip CON 8 în calculele de dinamica rotorilor, construit cu două grade de libertate complexe pe fiecare nod, este mai eficientă decât utilizarea altor variante de calcul, datorită aplicabilităţii mai generale.

Elementele de arbore tronconic descrise în paragrafele 3.1.2.1. (elementul CON 12) şi 3.1.2.2. (elementul CON 8), deoarece ţin cont de inerţia la rotaţie şi de deformaţiile de forfecare prin intermediul constantei $\mathbf{K} = \mathbf{12}\frac{\mathbf{EI}}{\mathbf{GA_S L^2}}$, se numesc, în general, elemente tronconice de bară Timoshenko. Dacă în expresiile matricelor acestor elemente constanta K se egalează cu zero, adică dacă nu se ţine cont de forfecarea elementului, ci numai de inerţia la rotaţie, atunci avem de a face cu elemente tronconice de bară de tip Rayleigh.

Dacă în expresiile matricelor elementelor descrise nu se ţine cont nici de inerţia la rotaţie, nici de forfecarea elementului, ci numai de încovoierea acestuia, atunci avem de a face cu elemente tronconice de bară de tip Bernoulli-Euler.

3.2. Discuri rigide

În studiul mişcării laterale a rotorului, deplasarea oricărui punct, incluzând şi centrul geometric al discului, se defineşte prin două translaţii (**v, w**) şi două rotaţii (**φ, ψ**).

În cele ce urmează rotorul se consideră axial simetric având axele ox, oy şi oz axe principale de inerţie, figura 3.15.

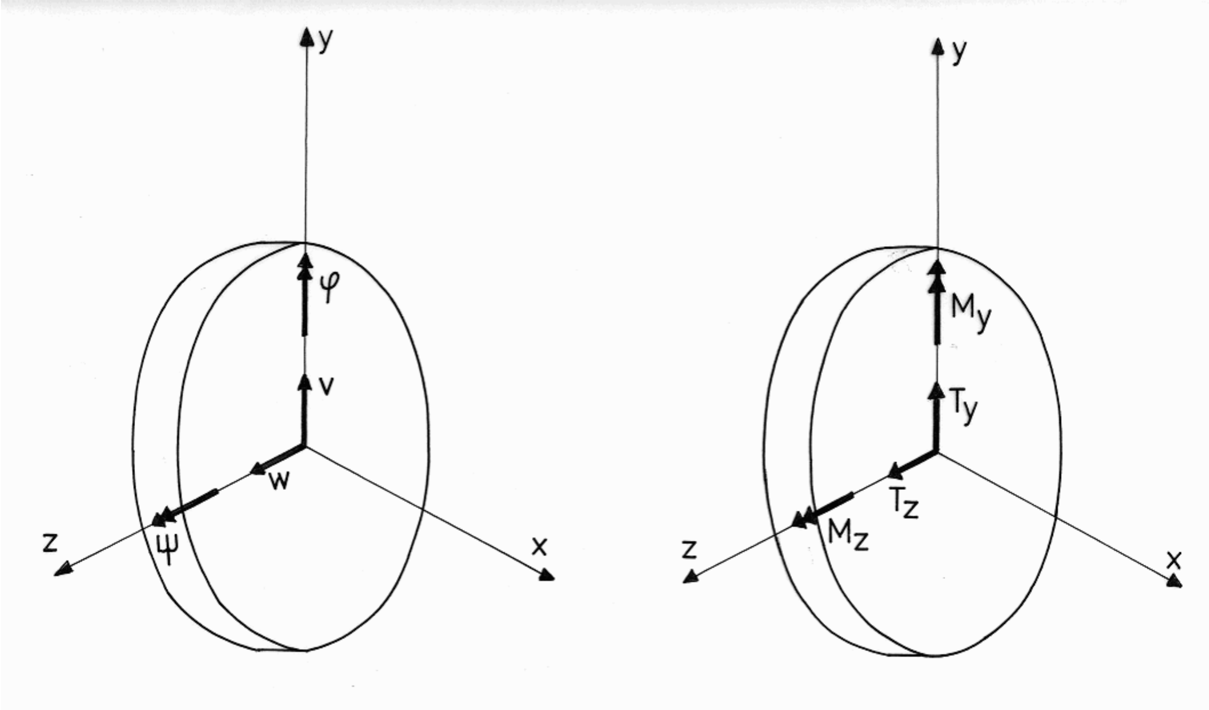


Fig.3.15

- **Matricea de inerţie şi matricea giroscopică**

Neglijând orice dezechilibru, energia cinetică a discului axial simetric este:

$$\mathbf{T^d = \frac{1}{2} m_d \left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{1}{2}\left(J_x \omega_x{}^2 + J_y \omega_y{}^2 + J_z \omega_z{}^2\right)} \qquad (3.236)$$

unde

$\mathbf{J_x=J_p}$ şi $\mathbf{J_y=J_z=J_T}$ sunt momentele de inerţie masice principale ale discului faţă de sistemul de axe xyz fixat pe disc;

$\mathbf{J_p}$=moment de inerţie masic polar al discului;

$\mathbf{J_T}$=moment de inerţie masic transversal al discului;

$\mathbf{m_d}$=masa discului.

Componentele vitezei unghiulare în sistemul de axe mobil **xyz** sunt:

$$\begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega + \dot{\varphi}\psi \\ \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta \end{Bmatrix} \qquad (3.237)$$

în care

Ω=viteza unghiulară cu care discul se roteşte în jurul axei **x**.

Înlocuind aceste componente în expresia energiei cinetice a discului, se obţine:

$$T^d = \frac{1}{2}m_d\left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right) + \frac{1}{2}J_p\left(\Omega + \dot{\varphi}\psi\right)^2 + \frac{1}{2}J_T\left[\left(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}\sin\theta\right)^2 + \left(\dot{\psi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\right)^2\right] \qquad (3.238)$$

$$T^d = \underbrace{\frac{1}{2}m_d\left(\dot{v}^2 + \dot{w}^2\right)}_{\text{translatia}} + \underbrace{\frac{1}{2}J_p\Omega^2}_{\text{energie de rotatie.}} + \underbrace{J_p\Omega\dot{\varphi}\psi}_{\text{efect giroscopic}} + \underbrace{\frac{1}{2}J_p\dot{\varphi}^2\psi^2}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2}J_T\left(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2\right)}_{\text{rotatie}} \qquad (3.239)$$

Aplicând ecuaţiile Lagrange, se obţine:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^d}{\partial \dot{v}}\right) - \underbrace{\frac{\partial T^d}{\partial v}}_{=0} = m_d\ddot{v} = T_y, \qquad (3.240)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^d}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T^d}{\partial \psi} = J_T\ddot{\psi} - \Omega J_p\dot{\varphi} = M_z, \qquad (3.241)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T^d}{\partial \dot{w}}\right)-\underbrace{\frac{\partial T^d}{\partial w}}_{=0}=m_d\ddot{w}=T_z\,, \qquad (3.242)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T^d}{\partial(-\dot{\varphi})}\right]-\underbrace{\frac{\partial T^d}{\partial(-\varphi)}}_{=0}=J_T(-\ddot{\varphi})-\Omega J_P\dot{\psi}=-M_y\,. \qquad (3.243)$$

În formă matriceală

$$\begin{bmatrix} m_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_T \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{w} \\ -\ddot{\varphi} \end{Bmatrix}+\Omega\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_P \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_P & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{\psi} \\ \dot{w} \\ -\dot{\varphi} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} T_y \\ M_z \\ T_z \\ -M_y \end{Bmatrix} \qquad (3.244)$$

Introducând vectorii deplasare de ordin 2x1 din planele X-Y, respectiv X-Z

$$\{u_y{}^d\}=\begin{Bmatrix} v \\ \psi \end{Bmatrix},\qquad \{u_z{}^d\}=\begin{Bmatrix} w \\ -\varphi \end{Bmatrix} \qquad (3.245)$$

şi vectorii corespunzători sarcinilor ce acţionează asupra discului în cele două plane

$$\{f_y{}^d\}=\begin{Bmatrix} T_y \\ M_z \end{Bmatrix},\qquad \{f_z{}^d\}=\begin{Bmatrix} T_z \\ -M_y \end{Bmatrix} \qquad (3.246)$$

ecuaţia matriceală devine:

$$\begin{bmatrix} [m^d] & [0] \\ [0] & [m^d] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\ddot{u}_y{}^d\} \\ \{\ddot{u}_z{}^d\} \end{Bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} [0] & [g^d] \\ -[g^d] & [0] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{u}_y{}^d\} \\ \{\dot{u}_z{}^d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_y{}^d\} \\ \{f_z{}^d\} \end{Bmatrix} \qquad (3.247)$$

unde membrul drept al forţelor care acţionează asupra discului include dezechilibru masic, dezechilibru datorat lipsei de aliniere, forţe de legătură şi alte efecte.

Submatricea

$$[m^d] = \begin{bmatrix} m^d & 0 \\ 0 & J_T \end{bmatrix} \qquad (3.248)$$

reprezintă submatricea de inerţie pentru un disc axial simetric, iar submatricea

$$[g^d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_P \end{bmatrix} \qquad (3.249)$$

reprezintă submatricea giroscopică pentru un disc axial simetric.

Vectorii forţelor de dezechilibru

Pentru analiza răspunsului unui rotor, este important să se determine vectorii dezechilibrului masic şi cei ai dezechilibrului datorat montării sub un unghi a discului.

- **Vectorul dezechilibrului masic**

În figura 3.16 centrul de masă G al discului este diferit de centrul geometric C al său, aşa încât CG se numeşte excentricitate şi se notează cu **a**. Se consideră sistemul de axe fix OXYZ, cu axa OX în lungul liniei lagărelor şi sistemul de axe mobil, legat de disc, Cxyz. În acest sistem de axe mobil, la timpul t=0, se notează $\mathbf{a_c = a \cos \alpha}$, $\mathbf{a_s = a \sin \alpha}$, unde $\boldsymbol{\alpha}$ este unghiul făcut de axa Cy cu excentricitatea CG.

Forţa centrifugă de dezechilibru care acţionează în centrul de masă G, în lungul lui CG este $\mathbf{m_d a \Omega^2}$. Componentele acesteia în sistemul de axe rotitor Cxyz sunt: $\mathbf{m_d a_c \Omega^2}$ şi $\mathbf{m_d a_s \Omega^2}$, iar componentele în sistemul de axe fix sunt:

$$\mathbf{f_y = m_d a_c \Omega^2 \cos\Omega t - m_d a_s \Omega^2 \sin\Omega t},$$
$$\mathbf{f_z = m_d a_s \Omega^2 \cos\Omega t + m_d a_c \Omega^2 \sin\Omega t}. \quad (3.254)$$

Cu ajutorul acestor componente se formează vectorul forţelor de dezechilibru.

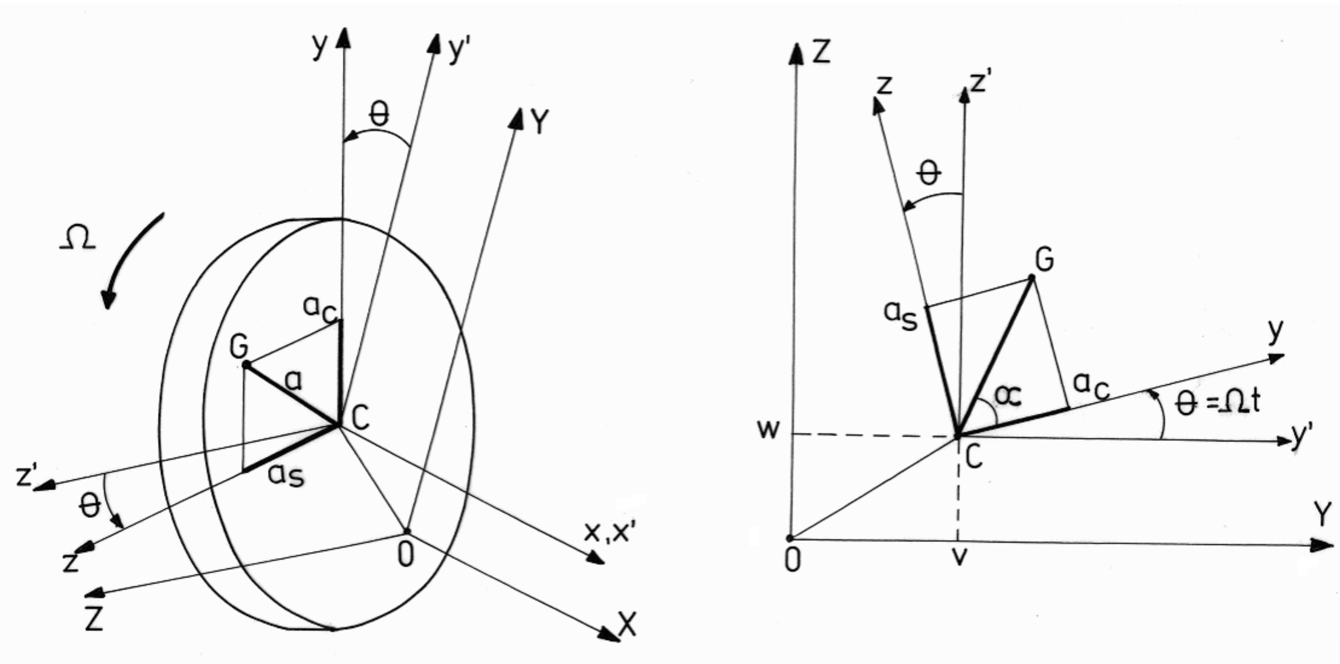


Fig.3.16

Vectorul forţelor de dezechilibru (neglijând înclinarea discului) este:

$$\{\mathbf{f}^d\} = \left\{\begin{Bmatrix}\mathbf{f_y}^d \\ \mathbf{f_z}^d\end{Bmatrix}\right\} = \mathbf{m_d}\begin{Bmatrix}\mathbf{a_c\Omega^2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{a_s\Omega^2} \\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}\mathbf{\cos\Omega t} + \mathbf{m_d}\begin{Bmatrix}\mathbf{-a_s\Omega^2} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{a_c\Omega^2} \\ \mathbf{0}\end{Bmatrix}\mathbf{\sin\Omega t}. \quad (3.251)$$

- **Vectorul datorat înclinării permanente a discului**

Un disc montat oblic pe arbore introduce momente giroscopice active care fac ca forţele din disc să-şi schimbe intensitatea.

Se consideră un disc rigid care nu este perpendicular pe arbore, ca în figura 3.17. Mărimea vectorială τ reprezintă abaterea unghiulară statică dintre axa principală de inerţie a discului şi axa arborelui, în poziţia iniţială, adică la **t=0**.

Discul montat oblic pe arbore poate fi definit cu ajutorul componentelor unui vector rotitor, $\boldsymbol{\tau}$, normal pe axa de rotaţie şi pe linia unghiului maxim de înclinare. Vectorul $\boldsymbol{\tau}$ face un unghi $\boldsymbol{\beta}$ cu axa rotitoare **z**, astfel încât vectorul discului înclinat are componentele

$$\boldsymbol{\tau_c = \tau \cos \beta} \tag{3.252}$$

$$\boldsymbol{\tau_s = \tau \sin\beta} \tag{3.253}$$

în sistemul de axe mobil xyz.

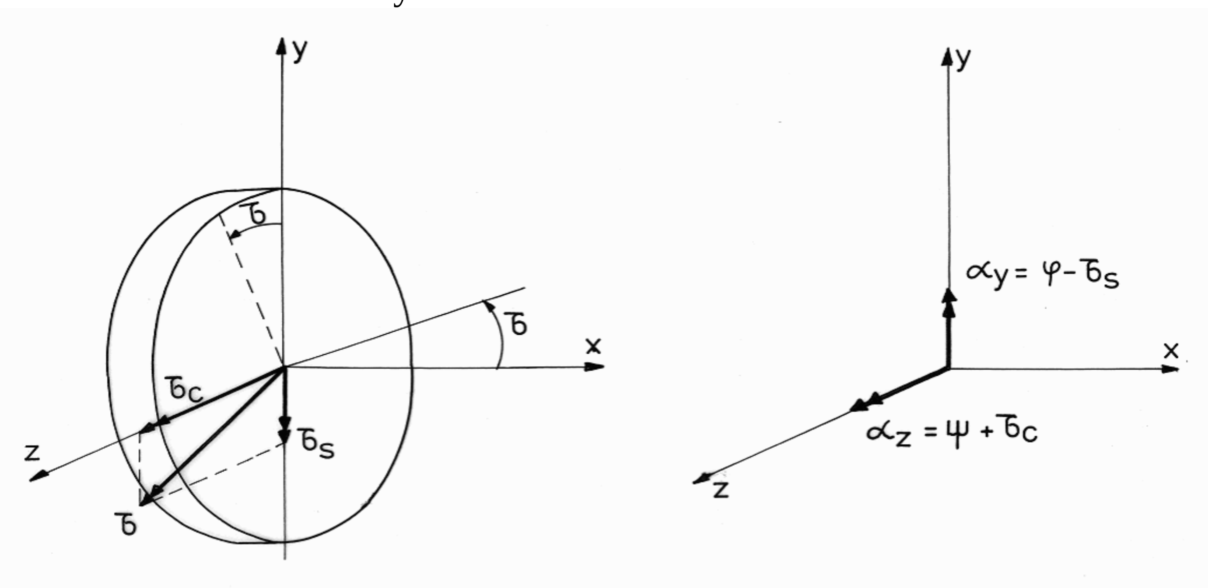


Fig.3.17

Componentele deplasărilor unghiulare devin:

$$\begin{cases} -\alpha_y = -\varphi + \tau \sin(\Omega t + \beta) \\ \alpha_z = \psi + \tau \cos(\Omega t + \beta). \end{cases} \tag{3.254}$$

unde $\boldsymbol{\varphi}$ şi $\boldsymbol{\psi}$ sunt rotiri elastice.

Vitezele şi acceleraţiile unghiulare corespunzătoare sunt:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_y = \dot{\varphi} - \Omega\tau\cos(\Omega t + \beta) \\ \dot{\alpha}_z = \dot{\psi} - \Omega\tau\sin(\Omega t + \beta) \end{cases} \tag{3.255}$$

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_y = \ddot{\varphi} + \Omega^2\tau\sin(\Omega t + \beta) \\ \ddot{\alpha}_z = \ddot{\psi} - \Omega^2\tau\cos(\Omega t + \beta) \end{cases} \tag{3.256}$$

Utilizând ecuaţia a doua şi a patra a lui Lagrange şi înlocuind în acestea pe φ cu α_y şi pe ψ cu α_z, se obţine:

$$\begin{cases} J_T\ddot{\alpha}_z + \Omega J_P(-\dot{\alpha}_y) = M_z \\ J_T(-\ddot{\alpha}_y) - \Omega J_P\dot{\alpha}_z = -M_y \end{cases} \tag{3.257}$$

Utilizând expresiile vitezelor şi acceleraţiilor unghiulare stabilite anterior, se obţin componentele cuplului giroscopic:

$$\begin{cases} M_z = J_T\ddot{\psi} - J_P\Omega\dot{\varphi} + (J_P - J_T)\Omega^2\tau\cos(\Omega t + \beta) \\ -M_y = J_T(-\ddot{\varphi}) - J_P\Omega\dot{\psi} + (J_P - J_T)\Omega^2\tau\sin(\Omega t + \beta). \end{cases} \tag{3.258}$$

Vectorul momentelor giroscopice active care acţionează asupra discului este:

$$\begin{Bmatrix} -M_z \\ M_y \end{Bmatrix} = (J_P - J_T)\Omega^2\left(\begin{Bmatrix} \tau\cos\beta \\ \tau\sin\beta \end{Bmatrix}\cos\Omega t + \begin{Bmatrix} -\tau\sin\beta \\ \tau\cos\beta \end{Bmatrix}\sin\Omega t\right) \tag{3.259}$$

Vectorul forţelor şi momentelor de dezechilibru este:

$$\{f^d\} = \Omega^2\begin{Bmatrix} m_d a_c \\ -(J_P - J_T)\tau_c \\ m_d a_s \\ -(J_P - J_T)\tau_s \end{Bmatrix}\cos\Omega t + \Omega^2\begin{Bmatrix} -m_d a_s \\ (J_P - J_T)\tau_s \\ m_d a_c \\ -(J_P - J_T)\tau_c \end{Bmatrix}\sin\Omega t. \tag{3.260}$$

Diferenţa dintre momentele de inerţie ale secţiunii **J_P-J_T** poate fi pozitivă (disc subţire), sau poate fi negativă (disc gros). Când **J_P-J_T>0**, momentul aplicat are efect de redresare, el acţionează asupra discului în direcţie opusă înclinării iniţiale. Când **J_P-J_T<0**, momentul aplicat creşte dezechilibrul unghiular acţionând asupra discului gros în continuare în direcţia înclinării iniţiale.

3.3. Lagăre

Maşinile cu rotor sunt întotdeauna rezemate pe lagăre. Acestea fac parte din sistemul rotor-lagăre şi se modelează în funcţie de tipul reazemului. Se prezintă în cele ce urmează modelarea lagărelor de rostogolire rezemate elastic şi modelarea lagărelor cu alunecare.

3.3.1. Lagăre de rostogolire rezemate elastic

Lagărele radiale sunt modelate de obicei luând în considerare rigiditatea la translaţie şi coeficienţii de amortizare. În cele ce urmează nu sunt luate în considerare efectele inerţiei.

Matricea de rigiditate pentru un lagăr radial

Relaţia între forţe şi deplasări pentru un lagăr radial, în sistem de axe yz, se poate scrie:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T_y} \\ \mathbf{T_z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k_{yy}} & \mathbf{k_{yz}} \\ \mathbf{k_{zy}} & \mathbf{k_{zz}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = \left[\mathbf{k^b}\right] \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}, \qquad (3.261)$$

unde elementele matricei $[k^b]$ se numesc coeficienţi de influenţă, astfel încât k_{ij} reprezintă forţa elastică pe direcţia “i” datorată deplasării unitare de pe direcţia “j”.

Se consideră sistemul de axe y’z’, ca în figura 3.18, rotit cu un unghi α faţă de sistemul de axe yz.

Vectorul deplasărilor în noul sistem de axe se poate scrie:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v'} \\ \mathbf{w'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix}. \qquad (3.262)$$

Vectorul forţelor în noul sistem de axe este:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T_y}' \\ \mathbf{T_z}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{T_y} \\ \mathbf{T_z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} \mathbf{T_y} \\ \mathbf{T_z} \end{Bmatrix}. \qquad (3.263)$$

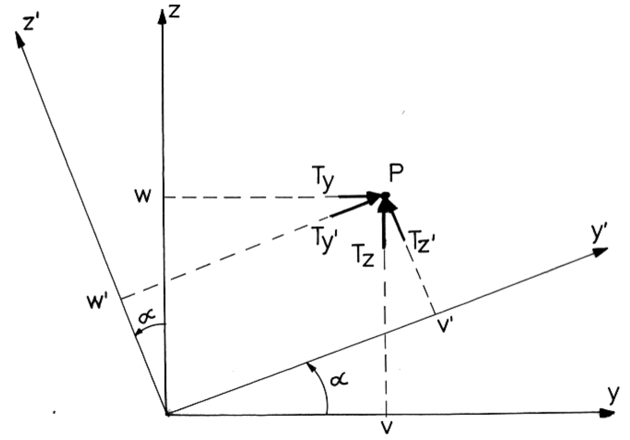


Fig.3.18

Renunţând la indicele “b” de la notaţia [k^b], noua relaţie între forţe şi deplasări devine:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{T_y}' \\ \mathbf{T_z}' \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]\begin{Bmatrix} \mathbf{T_y} \\ \mathbf{T_z} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}][\mathbf{k}]\begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}][\mathbf{k}][\mathbf{T}]^{-1}\begin{Bmatrix} \mathbf{v}' \\ \mathbf{w}' \end{Bmatrix}. \tag{3.264}$$

Pentru că $[\mathbf{T}]^{-1}=[\mathbf{T}]^{\mathbf{T}}$, matricea de rigiditate transformată este:

$$[\mathbf{k}'] = [\mathbf{T}][\mathbf{k}][\mathbf{T}]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{s} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{k_{yy}} & \mathbf{k_{yz}} \\ \mathbf{k_{zy}} & \mathbf{k_{zz}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix}, \tag{3.265}$$

unde **c=cos** $\boldsymbol{\alpha}$ şi **s=sin** $\boldsymbol{\alpha}$**.**

Matricea de rigiditate originală, nesimetrică, se poate descompune într-o sumă de două matrici, una simetrică **[k$_s$]** şi cealaltă antisimetrică **[k$_a$]**:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k_{yy}} & \mathbf{k_{yz}} \\ \mathbf{k_{zy}} & \mathbf{k_{zz}} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{k_{yy}} & \mathbf{k_s} \\ \mathbf{k_s} & \mathbf{k_{zz}} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k_s}]} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{k_a} \\ -\mathbf{k_a} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{k_a}]}, \tag{3.266}$$

unde

$$\begin{aligned} \mathbf{k_s} &= \frac{\mathbf{k_{yz}} + \mathbf{k_{zy}}}{\mathbf{2}}, \\ \mathbf{k_a} &= \frac{\mathbf{k_{yz}} - \mathbf{k_{zy}}}{\mathbf{2}} \end{aligned}. \tag{3.267}$$

Matricea de rigiditate transformată devine:

$$[\mathbf{k}'] = [\mathbf{T}]([\mathbf{k}_s] + [\mathbf{k}_a])[\mathbf{T}]^T = [\mathbf{k}_s{}'] + [\mathbf{k}_a{}'], \qquad (3.268)$$

unde

$$[\mathbf{k}_s{}'] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{yy}\mathbf{c}^2 + \mathbf{k}_{zz}\mathbf{s}^2 + 2\mathbf{k}_s\mathbf{cs} & (\mathbf{k}_{zz} - \mathbf{k}_{yy})\mathbf{sc} + \mathbf{k}_s(\mathbf{c}^2 - \mathbf{s}^2) \\ (\mathbf{k}_{zz} - \mathbf{k}_{yy})\mathbf{sc} + \mathbf{k}_s(\mathbf{c}^2 - \mathbf{s}^2) & \mathbf{k}_{yy}\mathbf{s}^2 + \mathbf{k}_{zz}\mathbf{c}^2 - 2\mathbf{k}_s\mathbf{cs} \end{bmatrix} \qquad (3.269)$$

şi **$[\mathbf{k}_a']=[\mathbf{k}_a]$.** (3.270)

Aceste rezultate implică următoarele:

- Componenta antisimetrică **$[\mathbf{k}_a]$** este independentă de matricea de rotaţie **[T]**, deci şi de unghiul α.
- Pentru $\mathbf{tg2}\alpha^* = \dfrac{2\mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_{yy} - \mathbf{k}_{zz}}$, componenta simetrică **$[\mathbf{k}_s]$** devine diagonală şi unghiurile α^* **si** $\alpha^* + 90°$ definesc direcţiile principale de elasticitate.

Matricea simetrică **$[\mathbf{k}_s]$** se poate diagonaliza prin transformarea de coordonate **[T]**, în timp ce matricea antisimetrică **$[\mathbf{k}_a]$** rămâne neschimbată. Aceste observaţii implică faptul că matricea de rigiditate nesimetrică se poate transforma într-o matrice în care elementele de pe diagonala secundară sunt antisimetrice.

În cazul în care elementele diagonale sunt identice, apar două cazuri particulare interesante:

- Când elementele de pe diagonala secundară sunt antisimetrice, matricea transformată este aceeaşi cu cea originală:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{s} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{s} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_1 \end{bmatrix},$$

prin urmare lagărul este <u>izotrop</u>.

- Când elementele de pe diagonala secundară sunt identice

$$[\mathbf{k}'] = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{s} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2 \\ \mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{s} \\ \mathbf{s} & \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 \sin 2\alpha & \mathbf{k}_2 \cos 2\alpha \\ \mathbf{k}_2 \cos 2\alpha & \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \sin 2\alpha \end{bmatrix}$$

şi pentru $\alpha^* = 45^\circ$

$$[\mathbf{k}'] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \end{bmatrix},$$

astfel, lagărul este <u>ortotrop</u>, având axele principale de elasticitate la 45° şi la 135°.

Concluzii

1. Dacă $|k_{yz}| \neq |k_{zy}|$ - lagăr anizotrop;
2. Dacă $k_{yz}=-k_{zy}$ şi $k_{yy}=k_{zz}$ - lagăr izotrop;
3. Dacă $k_{yz}=k_{zy}$ şi $k_{yy}\neq k_{zz}$ - lagăr ortotrop, având direcţiile principale definite de unghiurile α^* **si** $\alpha^* + 90^\circ$**;**
4. Dacă $k_{yz}=k_{zy}$ şi $k_{yy}=k_{zz}$ - lagăr ortotrop, având direcţiile principale la 45° şi la 135°;
5. Dacă $k_{yz}=k_{zy}=0$ şi $k_{yy}\neq k_{zz}$ - lagăr ortotrop având direcţiile principale pe orizontală şi verticală;
6. Dacă $k_{yz}=k_{zy}=0$ şi $k_{yy}=k_{zz}$ - lagăr izotrop;
7. Cuplajul antisimetric în componenta $[k_a]$, adică $k_{yz}\neq k_{zy}$, este cauza principală a instabilităţii într-un sistem anizotrop.

3.3.2. Lagăre cu alunecare

Proiectarea, construcţia şi exploatarea lagărelor cu alunecare necesită mai întâi o cunoaştere a ecuaţiilor, relaţiilor de calcul, proprietăţilor şi particularităţilor calitative ale funcţionării acestora. Marea majoritate a proprietăţilor, particularităţilor şi caracteristicilor de funcţionare ale lagărelor cu alunecare se pot deduce plecând de la studiul mişcării din pelicula de lubrifiant fluid, care desparte cele două suprafeţe în contact.

Coeficienţi dinamici ai lagărelor cu alunecare

Se consideră că fusul se mişcă în cuzinet de-a lungul unei orbite, în jurul poziţiei de echilibru, figura 3.19.

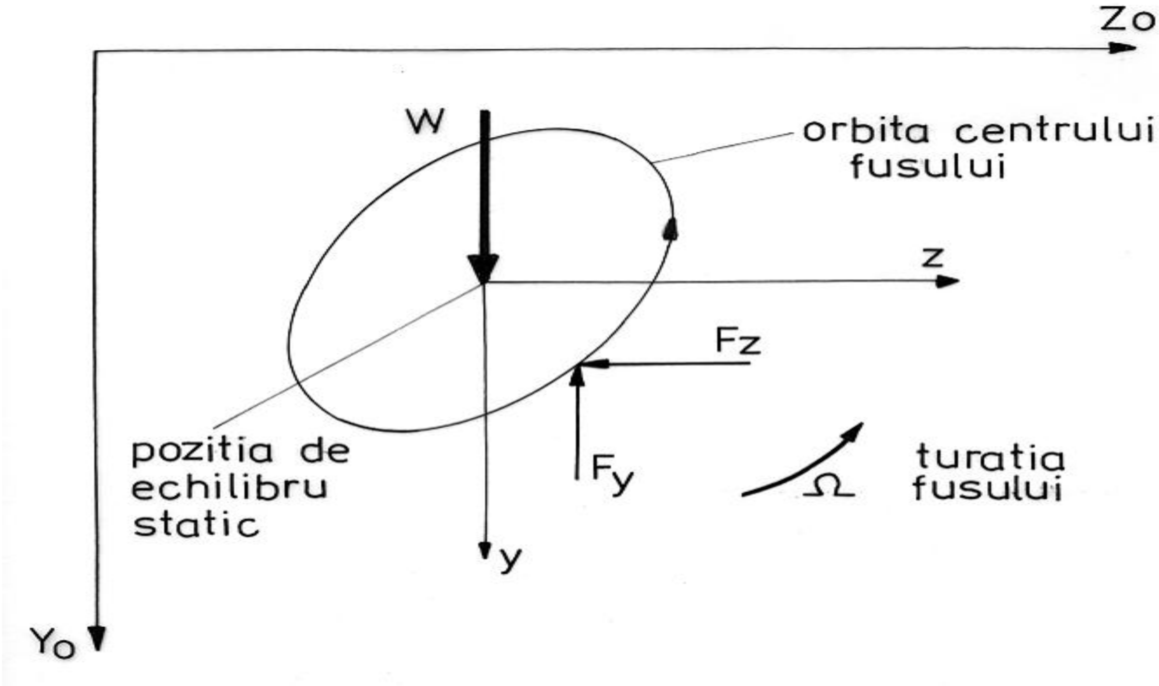


Fig.3.19

Rezultanta forţei de reacţiune din filmul de lubrifiant are amplitudine şi direcţie variabilă (nu mai este verticală). Componentele sale $\mathbf{F_y}$ şi $\mathbf{F_z}$ sunt funcţii neliniare de deplasările **y** şi **z** ale centrului fusului şi de componentele vitezei acestuia $\dot{\mathbf{y}}$ **si** $\dot{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{F_y = F_y(y, z, \dot{y}, \dot{z}),}$$
$$\mathbf{F_z = F_z(y, z, \dot{y}, \dot{z}).} \tag{3.271}$$

Pentru o amplitudine mică a mişcării, reacţiunea cuzinetului poate fi exprimată prin termenii de ordinul întâi dintr-o dezvoltare în serie Taylor în funcţie de componentele poziţiei de echilibru static:

$$\mathbf{F_y = F_{y_0} + k_{yy} y + k_{yz} z + c_{yy} \dot{y} + c_{yz} \dot{z},}$$
$$\mathbf{F_z = F_{z_0} + k_{zy} y + k_{zz} z + c_{zy} \dot{y} + c_{zz} \dot{z}.} \tag{3.272}$$

Componentele forţei de reacţiune statică sunt:

$$\mathbf{F_{y_0} = W}$$
$$\mathbf{F_{z_0} = 0.} \tag{3.273}$$

Cei opt coeficienţi ai componentelor forţelor liniarizate se calculează ca gradienţi corespunzători poziţiei de echilibru static $(y = z = \dot{y} = \dot{z})$:

$$\mathbf{k_{yy} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0}, \qquad \mathbf{k_{yz} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)_0},$$
$$\mathbf{k_{zy} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}\right)_0}, \qquad \mathbf{k_{zz} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)_0},$$
$$\mathbf{c_{yy} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right)_0}, \qquad \mathbf{c_{yz} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{z}}\right)_0}, \tag{3.274}$$
$$\mathbf{c_{zy} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial \dot{y}}\right)_0}, \qquad \mathbf{c_{zz} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial \dot{z}}\right)_0}.$$

Aceştia rezultă din soluţia ecuaţiei lubrifiantului. Liniarizarea forţelor de reacţiune din cuzinet are avantajul decuplării ecuaţiei mişcării rotorului de cea a lagărelor. Pe de altă parte, ecuaţiile rotorului trebuie să se integreze simultan cu cea a lubrifiantului.

În formă matriceală, expresiile forţelor $\mathbf{F_y}$ şi $\mathbf{F_z}$ se pot scrie:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F_y} \\ \mathbf{F_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{W} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{\Delta F_y} \\ \mathbf{\Delta F_z} \end{Bmatrix}. \tag{3.275}$$

Creşterile forţelor din filmul de lubrifiant, datorate mişcărilor mici în jurul poziţiei de echilibru static, se exprimă în funcţie de coeficienţii de influenţă $\mathbf{k_{ij}}$ şi în funcţie de coeficienţii de amortizare $\mathbf{c_{ij}}$:

$$\begin{Bmatrix}\Delta F_y\\ \Delta F_z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{yy} & k_{yz}\\ k_{zy} & k_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y\\ z\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}c_{yy} & c_{yz}\\ c_{zy} & c_{zz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{y}\\ \dot{z}\end{Bmatrix}=\left[k^b\right]\begin{Bmatrix}y\\ z\end{Bmatrix}+\left[c^b\right]\begin{Bmatrix}\dot{y}\\ \dot{z}\end{Bmatrix}. \quad (3.276)$$

Cei opt coeficienţi liniarizaţi, de influenţă şi de amortizare, depind de condiţiile de funcţionare ale fusului, prin urmare depind de viteza de rotaţie.

Coeficienţii de influenţă adimensionali se definesc după cum urmează:

$$\left[K^b\right]=\begin{bmatrix}K_{yy} & K_{yz}\\ K_{zy} & K_{zz}\end{bmatrix}=\frac{C}{W}\left[k^b\right], \quad (3.277)$$

unde **C** reprezintă jocul din lagăr, adică diferenţa între raza cuzinetului şi cea a fusului, $\mathbf{C=R_C-R_F}$.

Coeficienţii de amortizare adimensionali se definesc astfel:

$$\left[C^b\right]=\begin{bmatrix}C_{yy} & C_{yz}\\ C_{zy} & C_{zz}\end{bmatrix}=\frac{C\Omega}{W}\left[c^b\right], \quad (3.278)$$

unde Ω reprezintă viteza unghiulară a fusului, exprimată în rad/sec.

Pentru un set de parametri geometrici daţi şi vâscozitatea lubrifiantului cunoscută, aceşti opt coeficienţi sunt funcţie de numărul Sommerfeld, S, sau funcţie de excentricitatea fusului în cuzinet. Valorile pentru aceşti coeficienţi sunt daţi în cartea lui Someya [158].

Pelicula de lubrifiant fluid din lagăr, se modelează prin intermediul variaţiilor forţelor $\mathbf{T_y}$ şi $\mathbf{T_z}$, obţinute în urma unei dezvoltări în serie Taylor în raport cu relaţiile pentru forţă, deplasare şi viteză, corespunzătoare configuraţiei fusului în lagăr la echilibru:

$$\begin{Bmatrix}T_y\\ T_z\end{Bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}k^b_{yy} & k^b_{yz}\\ k^b_{zy} & k^b_{zz}\end{bmatrix}}_{\left[k^b\right]}\begin{Bmatrix}v\\ w\end{Bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}c^b_{yy} & c^b_{yz}\\ c^b_{zy} & c^b_{zz}\end{bmatrix}}_{\left[c^b\right]}\begin{Bmatrix}\dot{v}\\ \dot{w}\end{Bmatrix}. \quad (3.279)$$

În formă expandată:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{yy}^{b} & 0 & \mathbf{k}_{yz}^{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{k}_{zy}^{b} & 0 & \mathbf{k}_{zz}^{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v} \\ \psi \\ \mathbf{w} \\ -\varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{yy}^{b} & 0 & \mathbf{c}_{yz}^{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{c}_{zy}^{b} & 0 & \mathbf{c}_{zz}^{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\mathbf{w}} \\ -\dot{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_y \\ \mathbf{M}_z \\ \mathbf{T}_z \\ -\mathbf{M}_y \end{Bmatrix}. \quad (3.280)$$

În formă partiţionată:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{yy}^{b}] & [\mathbf{k}_{yz}^{b}] \\ [\mathbf{k}_{zy}^{b}] & [\mathbf{k}_{zz}^{b}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{u}_y^{b}\} \\ \{\mathbf{u}_z^{b}\} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{c}_{yy}^{b}] & [\mathbf{c}_{yz}^{b}] \\ [\mathbf{c}_{zy}^{b}] & [\mathbf{c}_{zz}^{b}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\dot{\mathbf{u}}_y^{b}\} \\ \{\dot{\mathbf{u}}_z^{b}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{f}_y^{b}\} \\ \{\mathbf{f}_z^{b}\} \end{Bmatrix}, \quad (3.281)$$

unde:

$$[\mathbf{k}_{ij}^{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{ij}^{b} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.282)$$

$$[\mathbf{c}_{ij}^{b}] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_{ij}^{b} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.283)$$

i,j=y,z.

În aceste relaţii s-au considerat numai coeficienţii de translaţie. Efectele inerţiei lagăr-fundaţie se neglijează.

4. Răspunsul dinamic al rotorilor modelaţi cu elemente de bară Timoshenko cilindrice şi tronconice

4.1. Introducerea elementului tronconic în programul DRACULA

În scopul obţinerii răspunsului dinamic al rotorilor puşi în discuţie, s-au creat în MATLAB următoarele subrutine, utilizate în programul DRACULA, în care s-au introdus elementele tronconice de tip CON 12 şi CON 8:

Subrutină pentru crearea matricei de masă a elementului conic CON 12

Subrutină pentru crearea matricei de rigiditate a elementului conic CON 12

Subrutină pentru crearea matricei giroscopice a elementului conic CON 12

Subrutina pentru crearea matricei de masă a elementului conic CON 8

Subrutina pentru crearea matricei de rigiditate a elementului conic CON 8

Subrutina pentru crearea matricei giroscopice a elementului conic CON 8

Cu ajutorul acestui program s-au realizat câteva simulări numerice.

4.2. Simulări numerice

Arborele unui rotor se modelează ca grindă deformabilă, iar celelalte componente ataşate acestuia se modelează ca fiind corpuri rigide.

Rotorii din exemplele prezentate ulterior includ porţiuni cilindrice şi conice tubulare. După o evaluare critică a mai multor tipuri de elemente finite de arbore, pentru analiza în Dinamica rotorilor s-au implementat în programul DRACULA, în MATLAB, cele două tipuri de elemente conice prezentate pe larg în paragrafele precedente, elementul conic CON 12 şi elementul conic CON 8.

Simularea numerică realizată cu programul DRACULA a arătat diferenţe mari între valorile frecvenţelor proprii obţinute pentru modelele bazate pe elemente tip Timoshenko şi pentru modelele bazate pe elemente Bernoulli-Euler, ceea ce îndreptăţeşte pe deplin modelarea care ţine cont de inerţia la rotaţie şi de deformaţiile de forfecare, adică modelarea cu elemente tip Timoshenko.

Exemplele prezentate în cele ce urmează au fost alese pentru a compara performanţele modelării unui rotor tronconic prin elemente finite conice cu rezultatele modelării convenţionale prin elemente finite cilindrice în trepte ale aceluiaşi rotor.

4.2.1. Exemplul 1

Acest rotor, figura 4.1, este un trunchi de con tubular, cu unghiul de înclinare de 15 grade, având la capete porţiuni cilindrice tubulare sprijinite pe reazeme rigide.

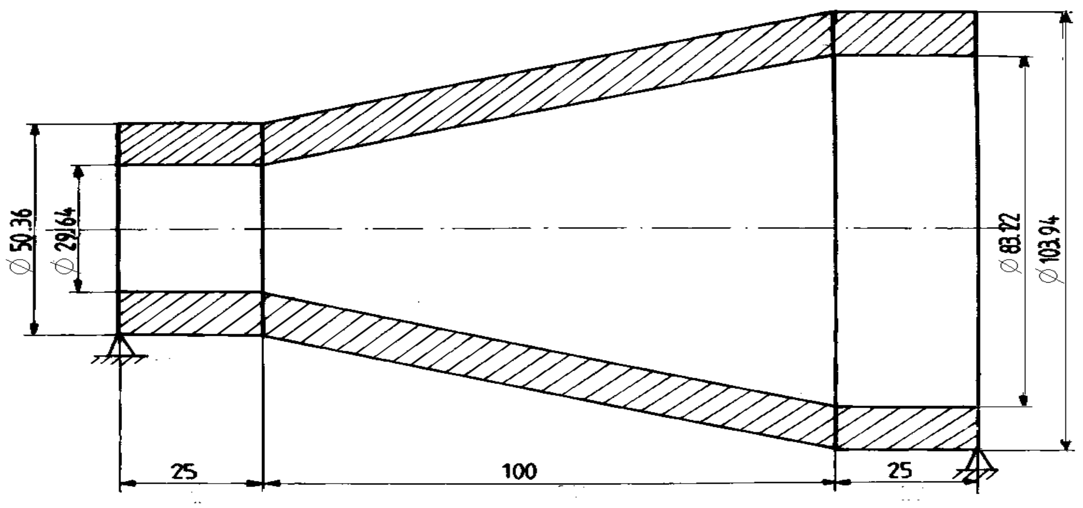


Fig.4.1

În figura 4.2 se prezintă diferite moduri de discretizare a secţiunii conice a acestui rotor, utilizând 1, 2, 4, 8, 16 şi 32 de elemente cilindrice sau conice.

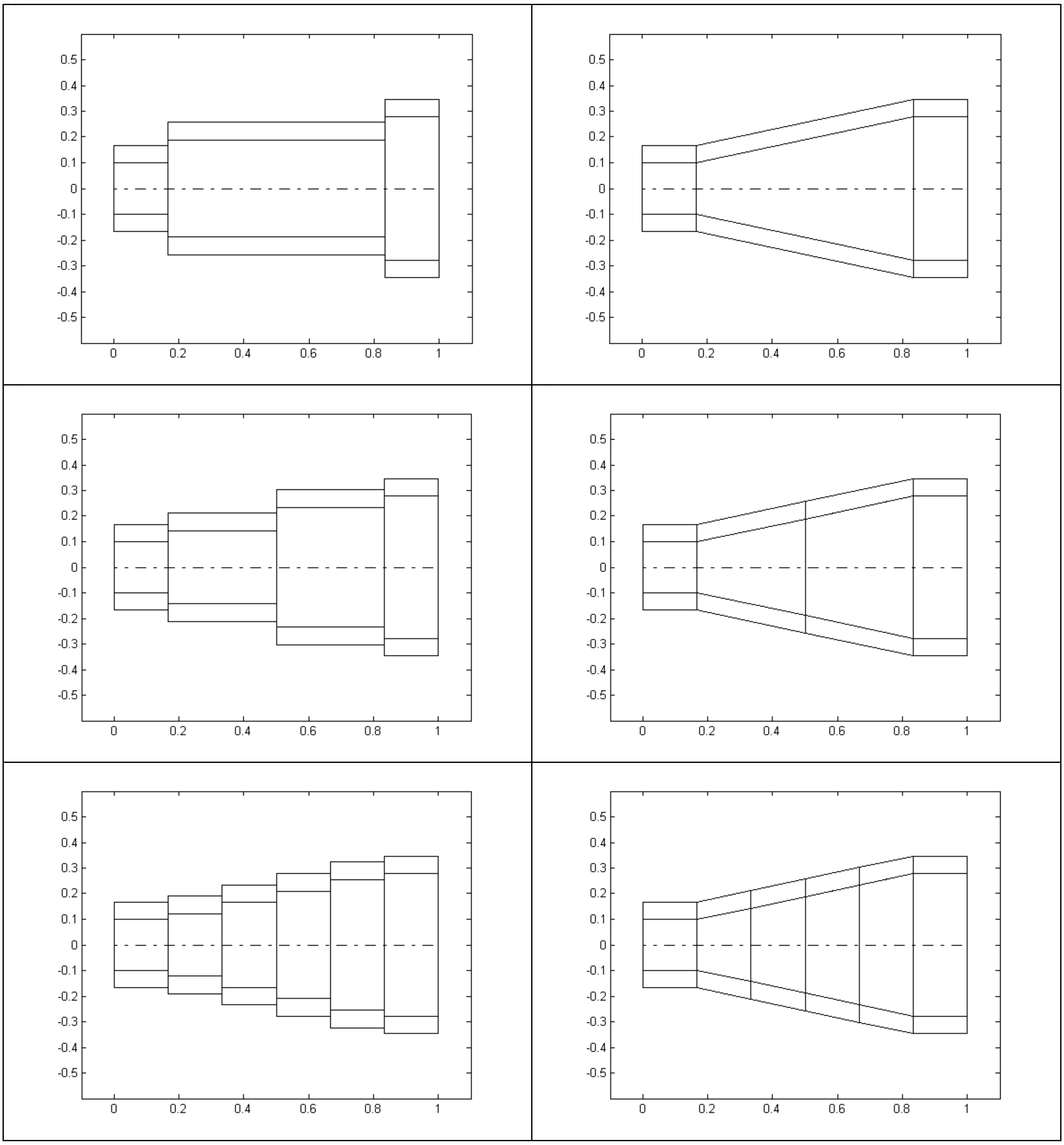


Fig.4.2

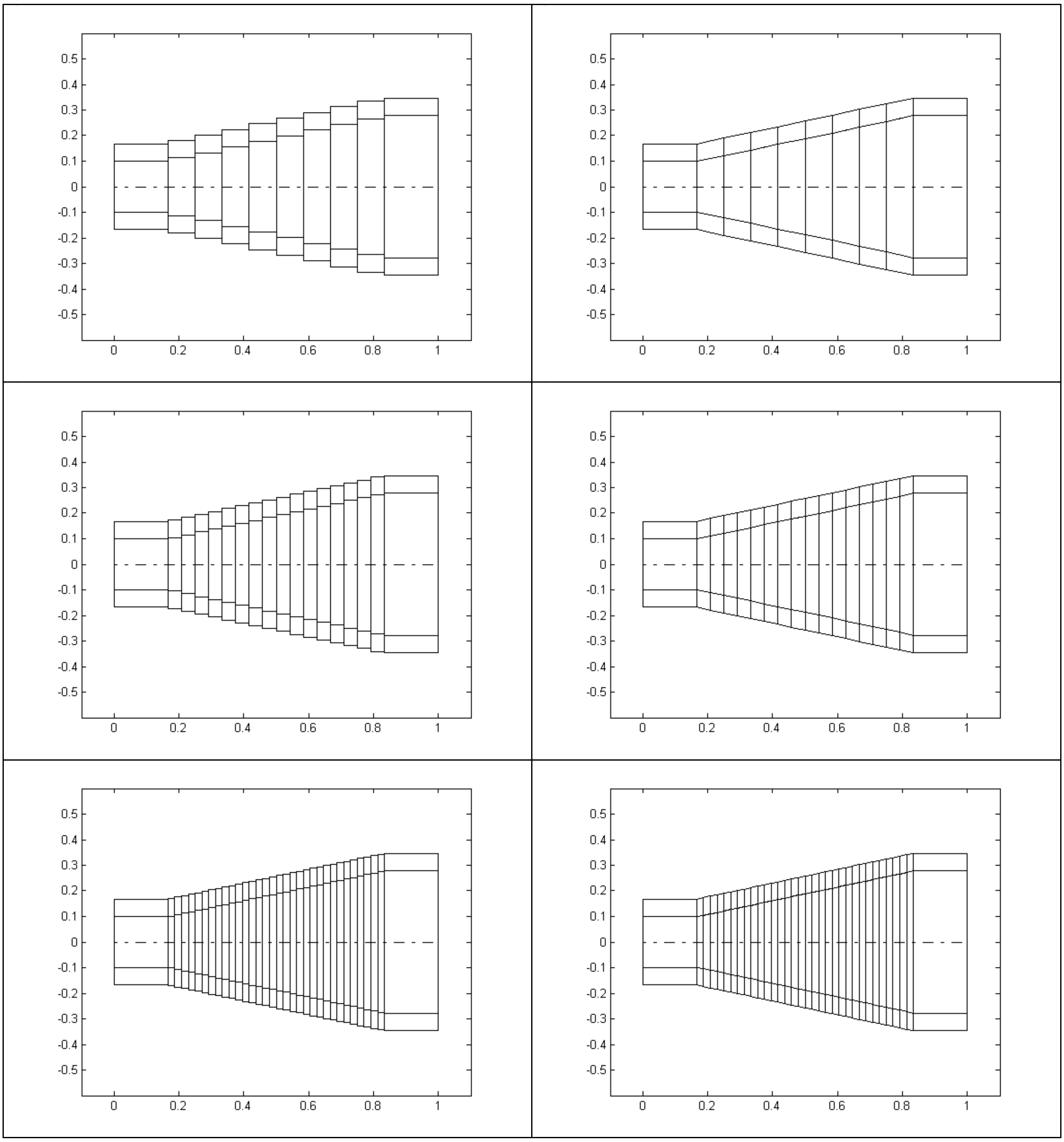


Fig.4.2 (continuare)

Rezultatele obţinute în urma acestor diferite discretizări sunt prezentate în tabelele care urmează.

În figura 4.3 este prezentată o modalitate generală de discretizare utilizând 4 elemente finite cilindrice în trepte.

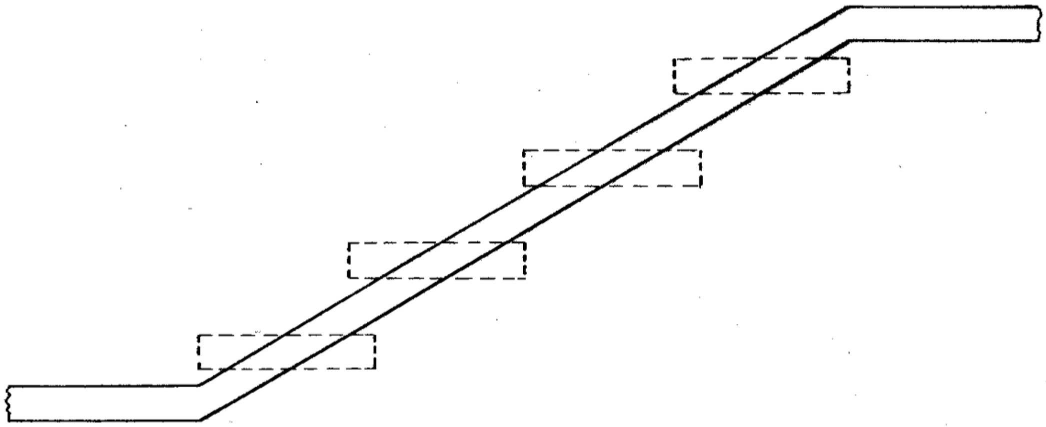


Fig.4.3

Examinând Tabelul 4.1 se pot compara rezultatele obţinute la turaţia de 1200 rot/min modelând porţiunea tronconică prin 1, 4 şi 32 de elemente de arbore Timoshenko cilindrice, de tip CON 12 şi de tip CON 8. S-au comparat primele 8 moduri de precesie. Elementele conice produc frecvenţe proprii convergente, monoton descrescătoare odată cu mărirea numărului de elemente, pe când elementele cilindrice produc o convergenţă nemonotonă.

Tabel 4.1. Frecvenţe proprii obţinute utilizând elemente de arbore Timoshenko

Mod Nr.	Element cilindric Timoshenko		Element conic CON 12 de tip Timoshenko			Element conic CON 8 de tip Timoshenko		
	Frecvenţa proprie [Hz] la 1200 rot/min							
	4elem.	32elem.	1elem.	4elem.	32elem.	1elem.	4elem.	32elem.
1B	12.400	12.324	12.814	12.350	12.323	15.752	12.581	12.326
1F	17.323	17.238	19.325	17.333	17.239	20.297	17.457	17.241
1Bbis	29.891	29.609	34.295	29.916	29.609	32.721	29.827	29.606
1Fbis	65.802	65.463	67.844	65.718	65.461	69.441	65.771	65.460
2B	42.677	41.624	48.742	42.742	41.625	48.862	42.875	41.628
2F	44.517	43.280	49.832	44.584	43.281	50.293	44.657	43.282
3B	72.251	68.274	82.136	72.409	68.276	77.273	72.434	68.277
3F	73.731	69.524	112.33	73.937	69.526	106.07	73.928	69.527

În Tabelul 4.2 se prezintă o comparaţie asemănătoare utilizând elemente de arbore Bernoulli-Euler, adică elemente pentru care se neglijează efectul inerţiei la rotaţie, deformaţia de forfecare, dar se consideră efectul giroscopic. În acest caz, convergenţa nemonotonă a frecvenţelor proprii, în cazul modelării cu elemente cilindrice, este mult mai pronunţată.

Tabel 4.2. Frecvenţe proprii obţinute utilizând elemente de arbore Bernoulli-Euler

Mod Nr.	Element cilindric Bernoulli-Euler		Element conic CON 12 de tip Bernoulli-Euler			Element conic CON 8 de tip Bernoulli-Euler		
	Frecvenţa proprie [Hz] la 1200 rot/min							
	4elem.	32elem.	1elem.	4elem.	32elem.	1elem.	4elem.	32elem.
1B	17.824	17.857	17.888	17.858	17.857	17.888	17.858	17.857
1F	29.241	29.300	29.444	29.303	29.302	29.445	29.304	29.303
2B	81.426	81.208	93.932	81.248	81.208	93.931	81.247	81.207
2F	119.11	118.75	137.75	118.80	118.75	137.75	118.80	118.75
3B	183.54	183.80	247.04	184.35	183.81	247.04	184.35	183.81
3F	265.58	265.37	323.99	266.05	265.37	323.99	266.05	265.37
4B	323.51	328.64	617.54	332.25	328.71	617.51	332.25	328.71
4F	473.88	433.33	914.26	478.53	473.36	914.30	478.53	473.36

În figurile 4.4.a şi b, se prezintă forma câtorva moduri de precesie a rotorului discretizat în patru elemente tronconice, pe porţiunea de arbore conic, respectiv în 32 de elemente tronconice.

În figura 4.5 se prezintă orbitele eliptice ale nodului 33, ales arbitrar, de pe arbore, pentru cele 8 moduri de precesie analizate.

Turaţiile critice amortizate sunt date de abscisele punctelor de intersecţie dintre curbele frecvenţelor proprii şi linia de sincronism (desenată punctat).

Intersectând liniile din diagramă cu linia verticală de la 1200 rot/min rezultă frecvenţele proprii din coloana 5, Tabelul 4.1.

Diagrama Campbell din figura 4.6 prezintă dependenţa de turaţie a primelor 14 frecvenţe proprii amortizate, calculate folosind elemente conice Timoshenko de tip CON 12 pe porţiunea tronconică. Curbele corespunzătoare modurilor „spectrului de ordinul întâi” apar în perechi relativ apropiate, efectul giroscopic fiind redus, pentru că rotorul este un arbore fără discuri sau alte componente care să introducă acceleraţie Coriolis mare.

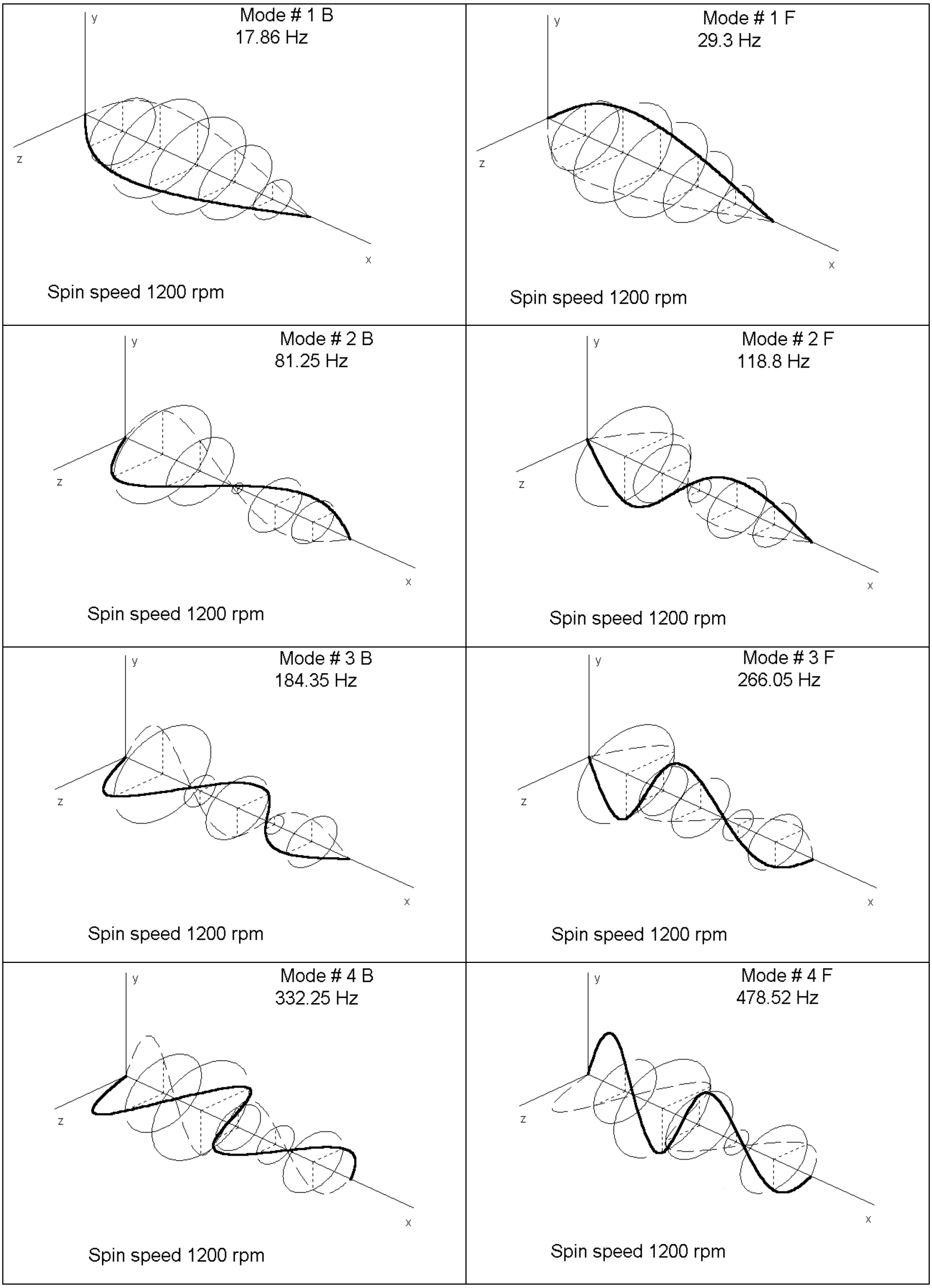
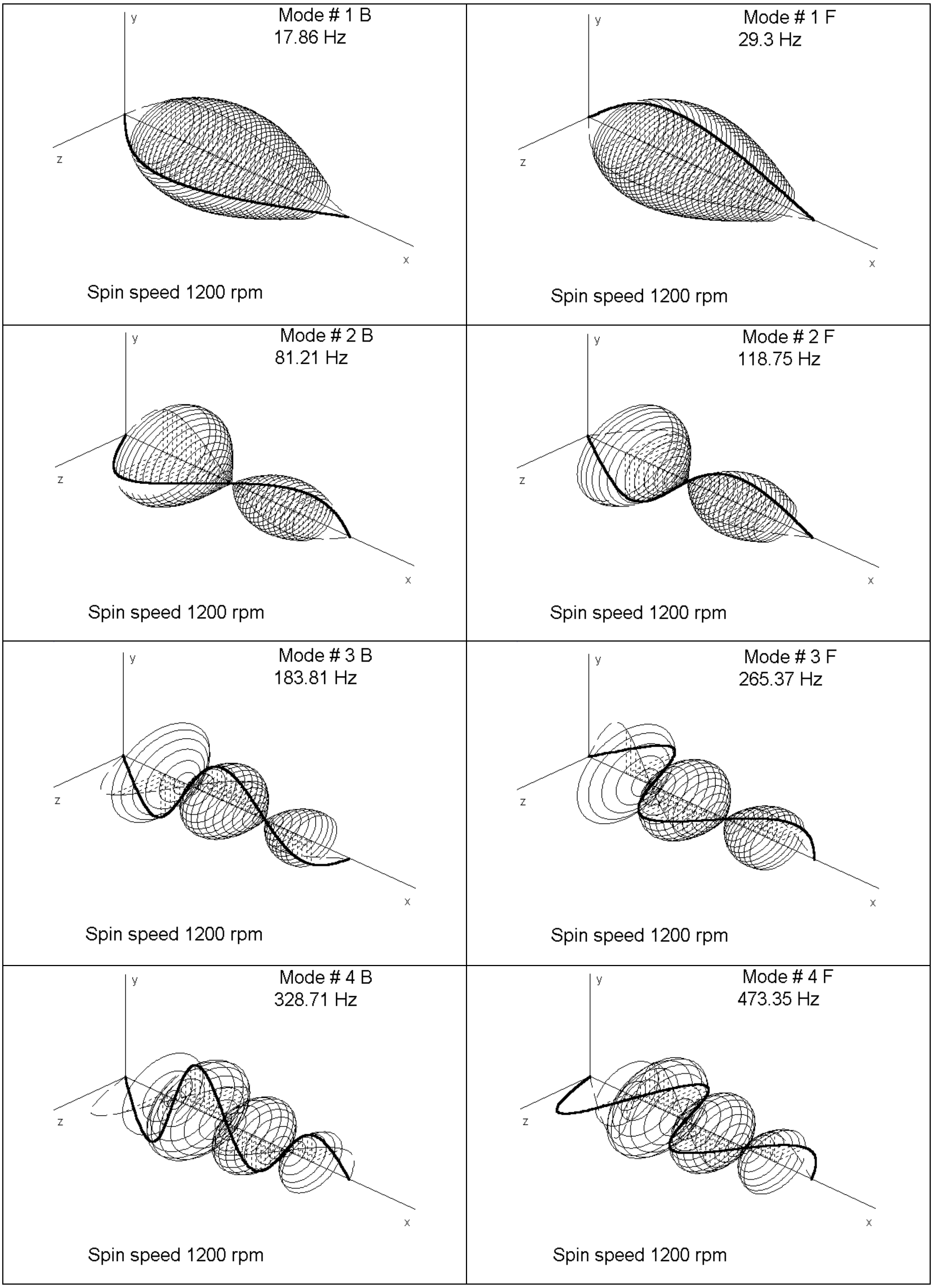

Mode # 1 B
17.86 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 1 F
29.3 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 B
81.25 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 F
118.8 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 B
184.35 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 F
266.05 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 4 B
332.25 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm
Mode # 4 F
478.52 Hz
y
z
x
Spin speed 1200 rpm

Fig.4.4.a



Mode # 1 B
17.86 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 1 F
29.3 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 B
81.21 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 F
118.75 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 B
183.81 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 F
265.37 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 4 B
328.71 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 4 F
473.35 Hz
Spin speed 1200 rpm

Fig.4.4.b

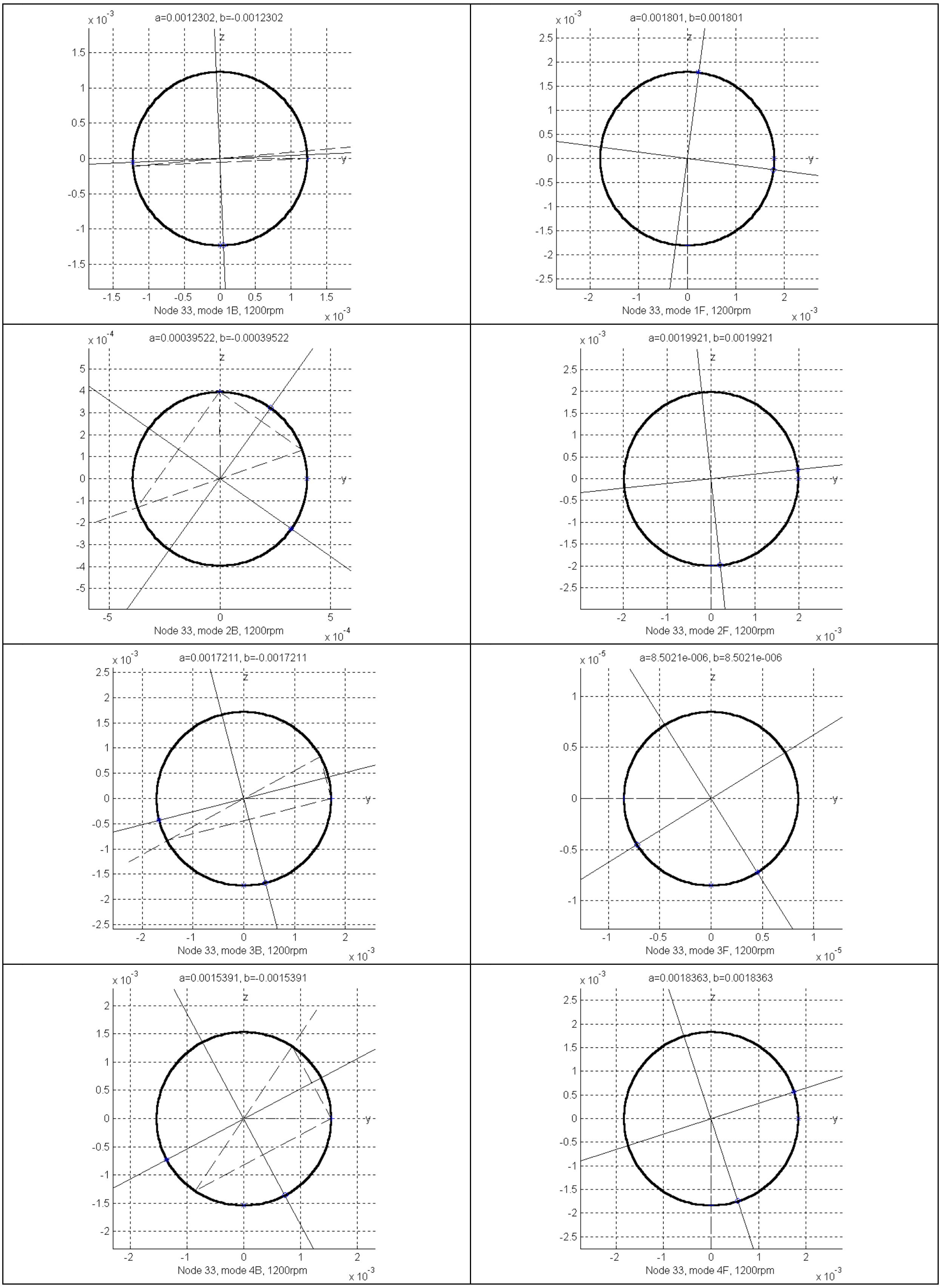

a=0.0012302, b=-0.0012302
Node 33, mode 1B, 1200rpm
a=0.001801, b=0.001801
Node 33, mode 1F, 1200rpm
a=0.00039522, b=-0.00039522
Node 33, mode 2B, 1200rpm
a=0.0019921, b=0.0019921
Node 33, mode 2F, 1200rpm
a=0.0017211, b=-0.0017211
Node 33, mode 3B, 1200rpm
a=8.5021e-006, b=8.5021e-006
Node 33, mode 3F, 1200rpm
a=0.0015391, b=-0.0015391
Node 33, mode 4B, 1200rpm
a=0.0018363, b=0.0018363
Node 33, mode 4F, 1200rpm

Fig.4.5

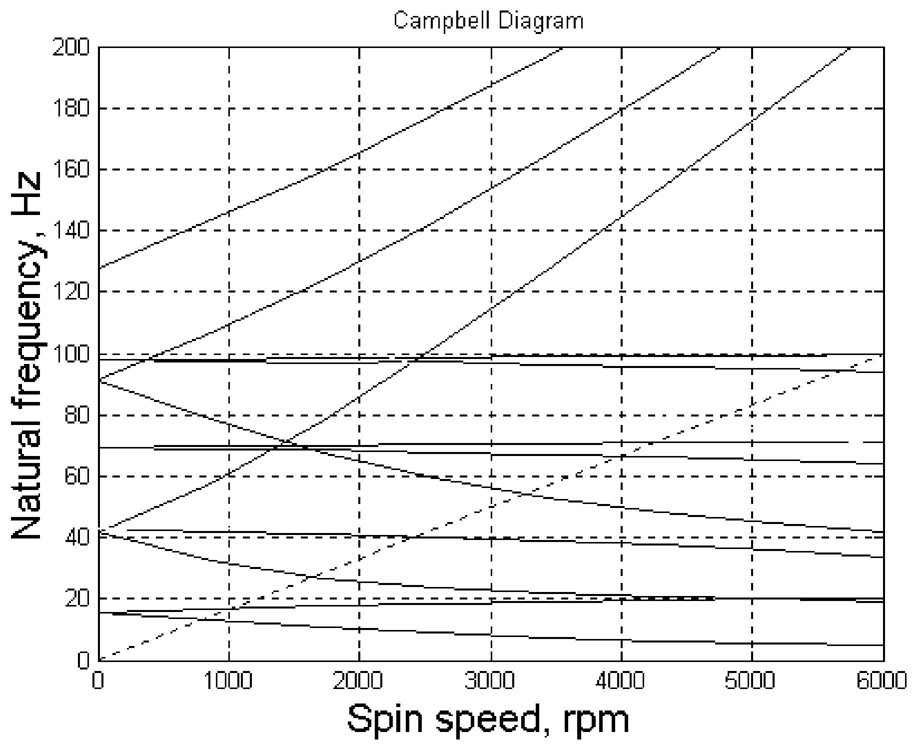

Campbell Diagram
Natural frequency, Hz
Spin speed, rpm
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000

Fig.4.6

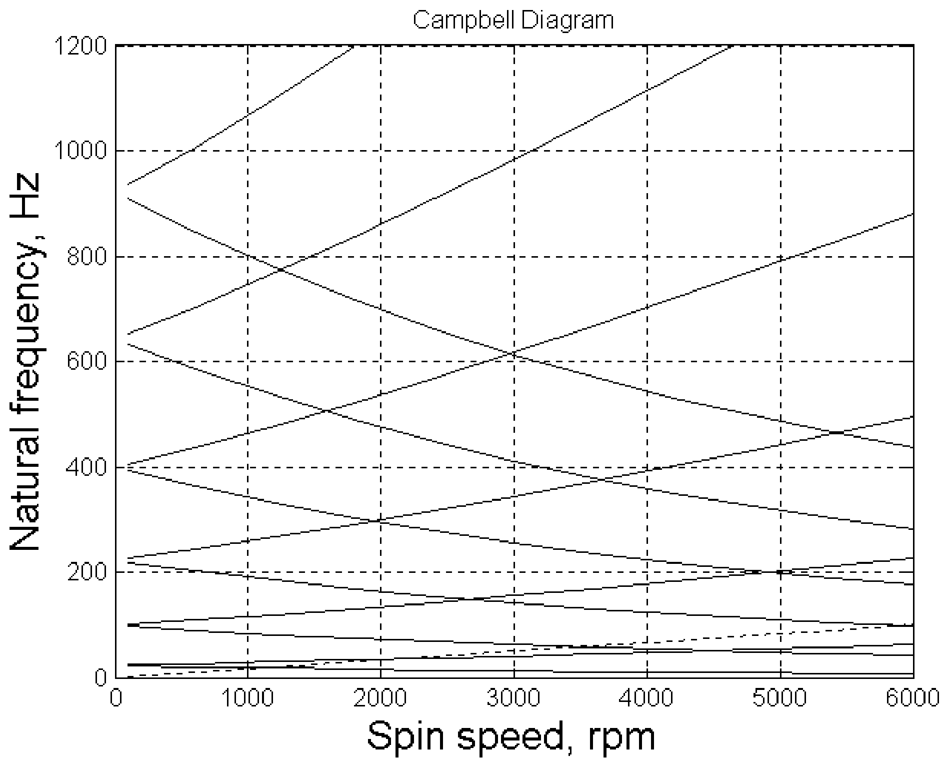

Campbell Diagram
Natural frequency, Hz
Spin speed, rpm
0
200
400
600
800
1000
1200
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000

Fig.4.7

Modurile corespunzătoare „spectrului de frecvenţe de ordinul doi” pot fi recunoscute uşor, ele apar în perechi divergente în diagrama Campbell datorată efectului giroscopic mare. Aceste moduri apar atunci când rotirea secţiunii transversale datorită forfecării este de sens contrar rotirii produse de încovoiere (Fig.4.7.1,a). Când rotirile au acelaşi sens ia naştere un mod de precesie obişnuit (Fig.4.7.2,b).

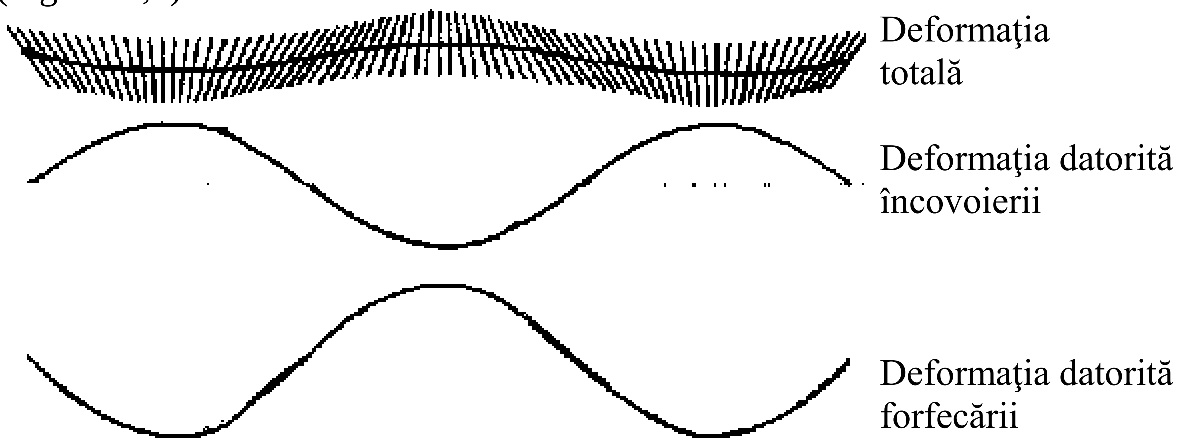


Fig.4.7.1,a

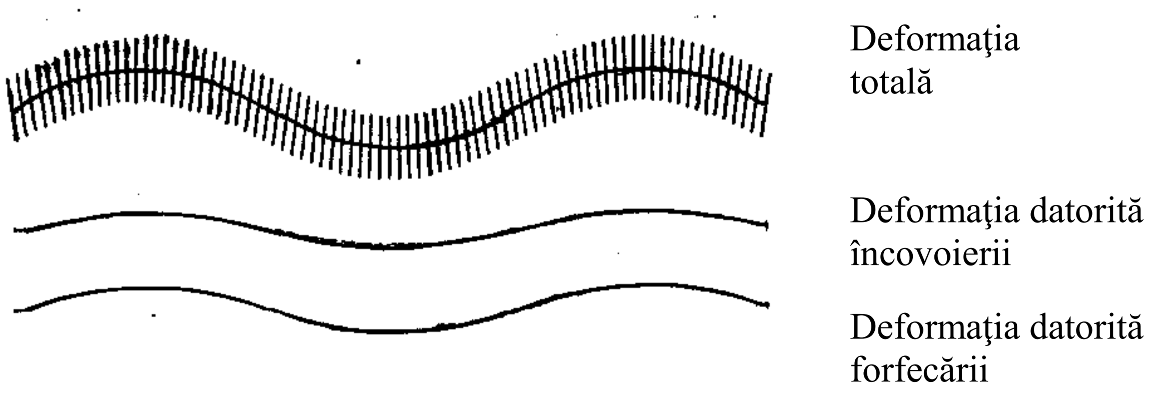


Fig.4.7.1,b

Diagrama Campbell din figura 4.7 prezintă dependenţa de turaţie a primelor 12 moduri de precesie, calculate utilizând elemente conice Bernoulli-Euler pentru porţiunea tronconică, adică elemente pentru care se neglijează efectul inerţiei la rotaţie şi efectul deformaţiei de forfecare. Comparând această diagramă cu cea din figura 4.6 rezultă diferenţe relativ mari pentru valorile pulsaţiilor proprii.

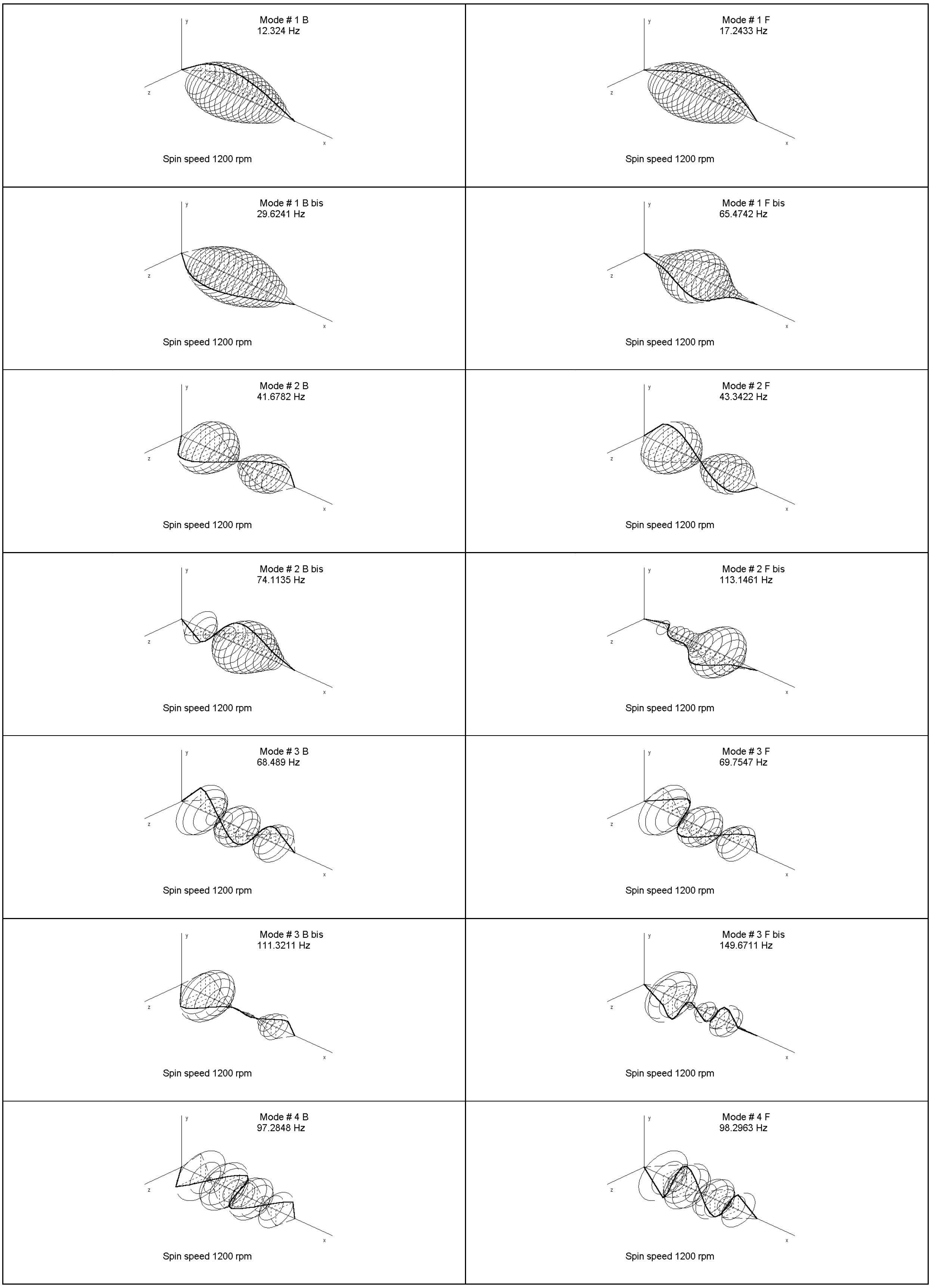

Mode # 1 B
12.324 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 1 F
17.2433 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 1 B bis
29.6241 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 1 F bis
65.4742 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 B
41.6782 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 F
43.3422 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 B bis
74.1135 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 2 F bis
113.1461 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 B
68.489 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 F
69.7547 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 B bis
111.3211 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 3 F bis
149.6711 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 4 B
97.2848 Hz
Spin speed 1200 rpm
Mode # 4 F
98.2963 Hz
Spin speed 1200 rpm

Fig.4.7.2

În figura 4.7.2 s-au ilustrat formele modurilor proprii de precesie ale rotorului discretizat cu elemente de arbore tip Timoshenko, care permit vizualizarea spectrului de frecvenţe de ordinul doi corespunzătoare diagramei Campbell din figura 4.6. Aceste moduri au fost notate cu „bis”.

În acest prim exemplu a fost ales pentru modelare un caz real de rotor conic, având un unghi relativ mic de înclinare.

Modelarea cu elemente finite conice duce la obţinerea de valori mai mari ale pulsaţiilor proprii, în fiecare caz studiat, acestea convergând monoton de la valori superioare către valorile „exacte” (considerate a fi foarte apropiate de cele obţinute după discretizarea rotorului în 32 de elemente).

Rezultatele obţinute în urma discretizării rotorului în elemente cilindrice în trepte sunt convergente, dar nu numai de la valori superioare, ci chiar şi de la valori inferioare către valori apropiate de cele „exacte”. Convergenţa nemonotonă a acestui tip de modelare este mai evidentă pentru elementele Bernoulli-Euler.

Elementul conic CON 12, cu reducerea Guyan a gradelor de libertate pentru deformaţiile de forfecare, conduce la o precizie mai mare a valorilor pulsaţiilor proprii ale primelor două moduri de precesie decât elementul conic CON 8. Elementul CON 8 conduce la o exactitate mai mare în calcul pentru modurile superioare de precesie.

Modelarea porţiuniii tronconice printr-un singur element conic produce erori mari, astfel încât nu este recomandată.

Dacă inerţia la rotaţie şi forfecarea transversală se neglijează, atunci elementele CON 12 şi CON 8 conduc, în esenţă, la aceleaşi rezultate.

Utilizarea elementelor finite conice pentru porţiunile de arbore tronconic conduce la creşterea preciziei calculelor şi la simplificarea procedurii de modelare.

4.2.2. Exemplul 2

Rotorul din figura 4.8 este un rotor real produs de firma „Brown Boveri", existent în Compartimentul de prezentare al echipamentelor mecanice pentru turbinele de abur, având numărul de înregistrare CH-T 110 273 D, [214].

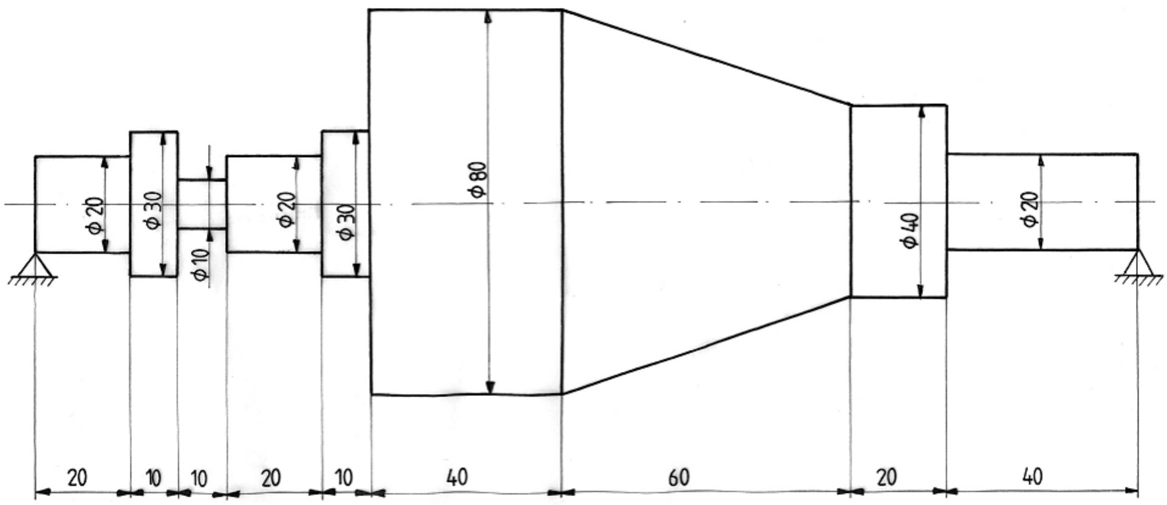


Fig.4.8

Rotorul este alcătuit din câteva porţiuni de arbore cilindric în trepte şi o porţiune de arbore tronconică. Porţiunile cilindrice au fost modelate utilizând elemente de arbore cilindric, iar porţiunea tronconică a fost modelată cu elemente conice, discretizând porţiunea tronconică în 4 elemente conice (Fig. 4.9), de tip CON 12, apoi de tip CON8 bazate pe elemente Timoshenko. Calculele s-au realizat cu programul DRACULA în MATLAB.

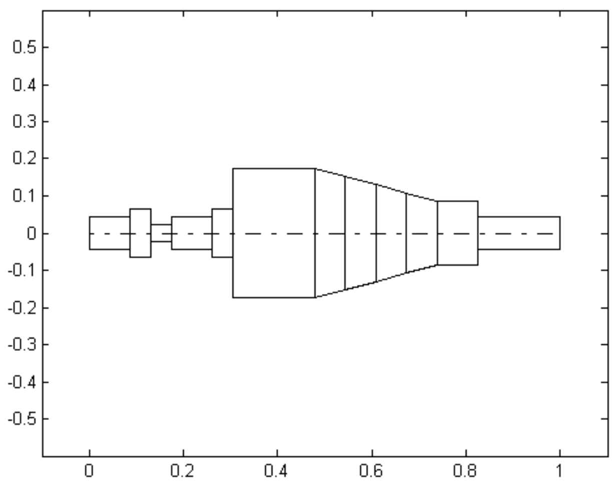


Fig.4.9

În Tabelul 4.3 se compară rezultatele obţinute la turaţia de 6000 rot/min modelând întregul arbore folosind elemente conice CON 12 şi CON 8 de tip Timoshenko, ţinând cont de faptul că elementul cilindric de arbore este un caz particular al elementului conic de arbore.

Tabelul 4.3. Frecvenţe proprii obţinute utilizând elemente de arbore Timoshenko

Mod Nr.	Element CON 12 de tip Timoshenko	Element CON 8 de tip Timoshenko
	Frecvenţa proprie [Hz] la 6000 rot/min	
1B	0.288	0.288
1F	1.894	1.899
1B bis	2.177	2.188
1F bis	27.045	27.116
2B	20.622	20.622
2F	33.330	33.375
2B bis	26.099	26.282
2F bis	58.671	58.974

Se observă că rezultatele obţinute au valori apropiate pentru cele două situaţii.

În figura 4.10 se arată forma primelor 8 moduri de precesie.

În figura 4.11 se prezintă orbitele de precesie ale nodului 9, ales arbitrar, de pe arbore, pentru cele 8 moduri de precesie analizate.

Diagrama Campbell din figura 4.12 prezintă dependenţa de turaţie a primelor 12 frecvenţe proprii amortizate, calculate folosind elemente conice Timoshenko de tip CON 12 pe porţiunea tronconică.

Turaţiile critice amortizate sunt date de abscisele punctelor de intersecţie dintre curbele frecvenţelor proprii şi linia de sincronism (desenată punctat).

Intersectând liniile din diagramă cu linia verticală de la 6000 rot/min rezultă frecvenţele proprii din Tabelul 4.3.

Diagrama Campbell din figura 4.13 prezintă dependenţa de turaţie doar a primelor 8 frecvenţe proprii amortizate. Diagrama a fost arătată pentru o claritate mai mare a imaginii.

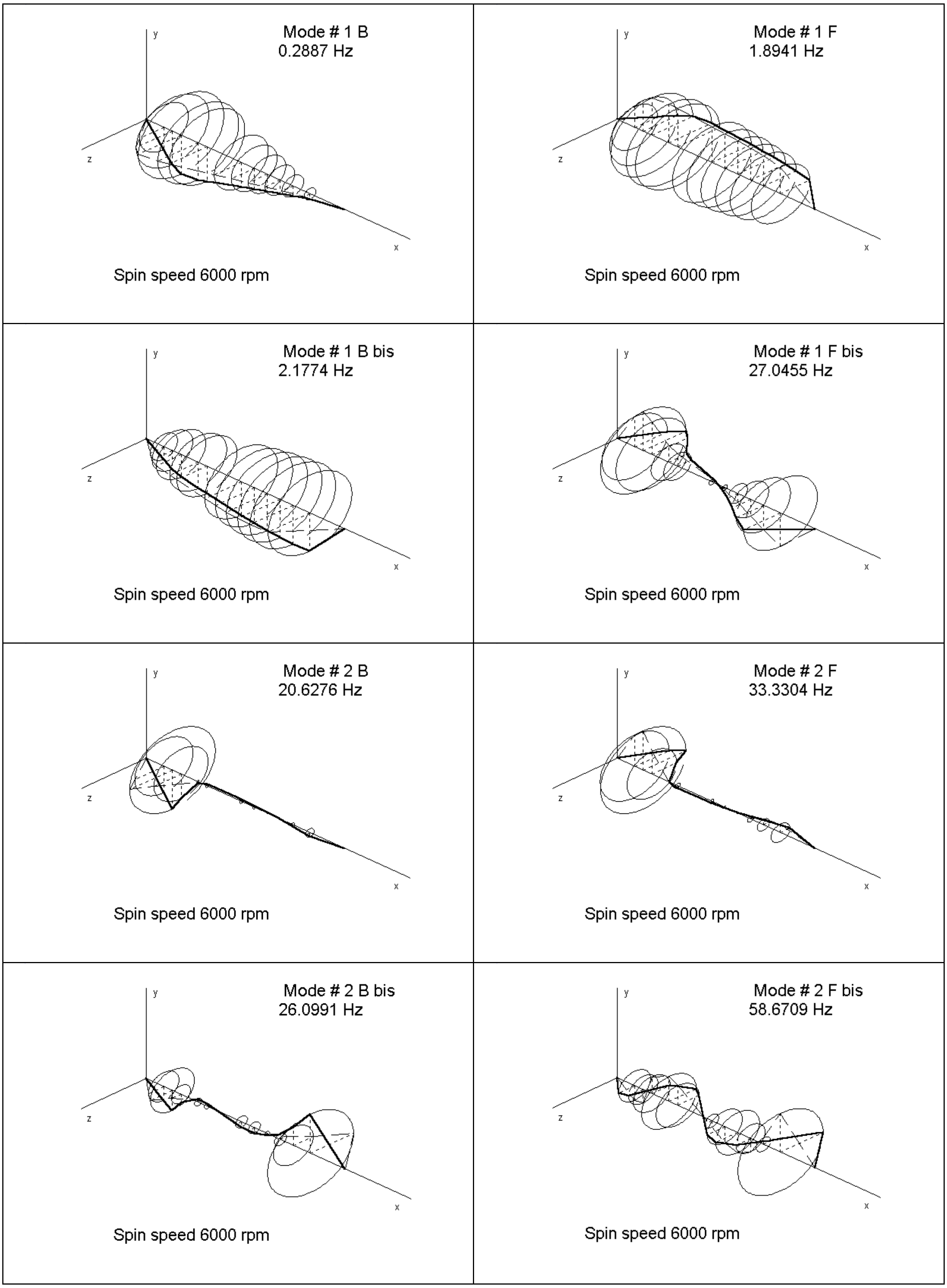

Mode # 1 B
0.2887 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 1 F
1.8941 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 1 B bis
2.1774 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 1 F bis
27.0455 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 2 B
20.6276 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 2 F
33.3304 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 2 B bis
26.0991 Hz
Spin speed 6000 rpm
Mode # 2 F bis
58.6709 Hz
Spin speed 6000 rpm

Fig.4.10

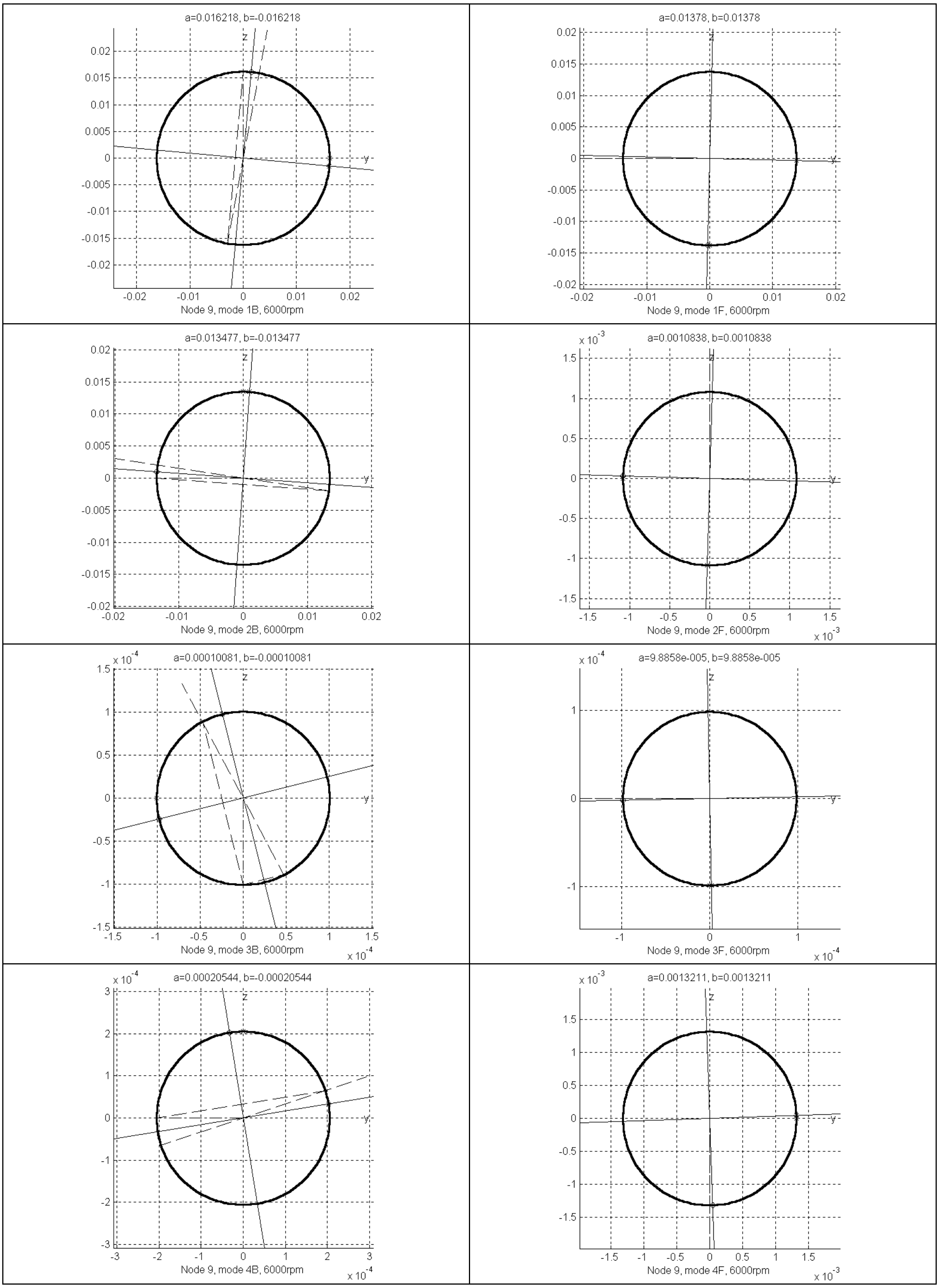

a=0.016218, b=-0.016218
Node 9, mode 1B, 6000rpm
a=0.01378, b=0.01378
Node 9, mode 1F, 6000rpm
a=0.013477, b=-0.013477
Node 9, mode 2B, 6000rpm
a=0.0010838, b=0.0010838
Node 9, mode 2F, 6000rpm
a=0.00010081, b=-0.00010081
Node 9, mode 3B, 6000rpm
a=9.8858e-005, b=9.8858e-005
Node 9, mode 3F, 6000rpm
a=0.00020544, b=-0.00020544
Node 9, mode 4B, 6000rpm
a=0.0013211, b=0.0013211
Node 9, mode 4F, 6000rpm

Fig.4.11

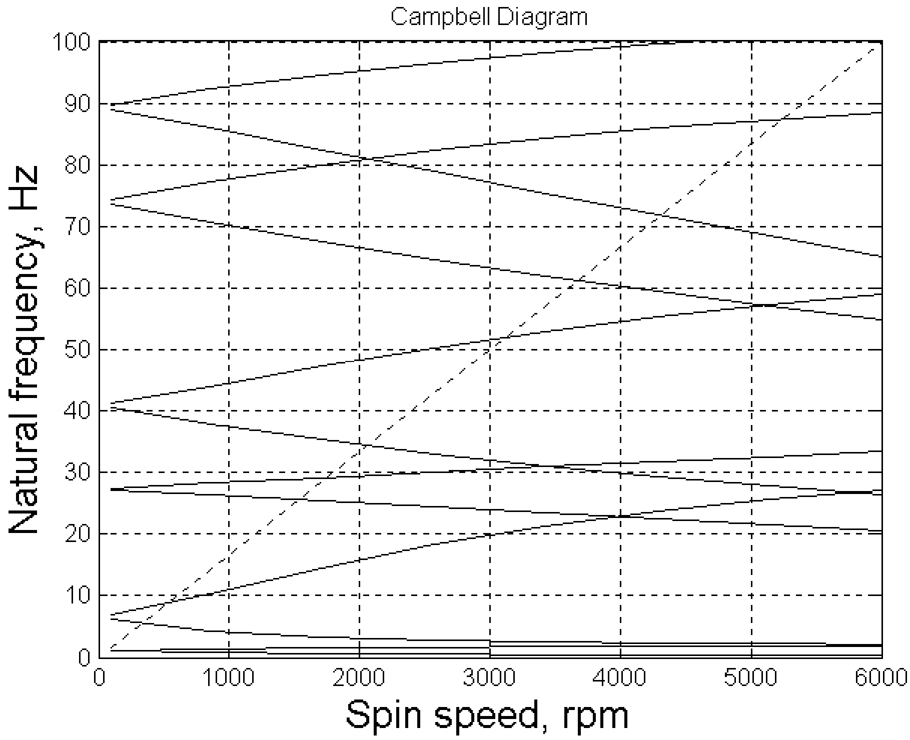


Fig.4.12

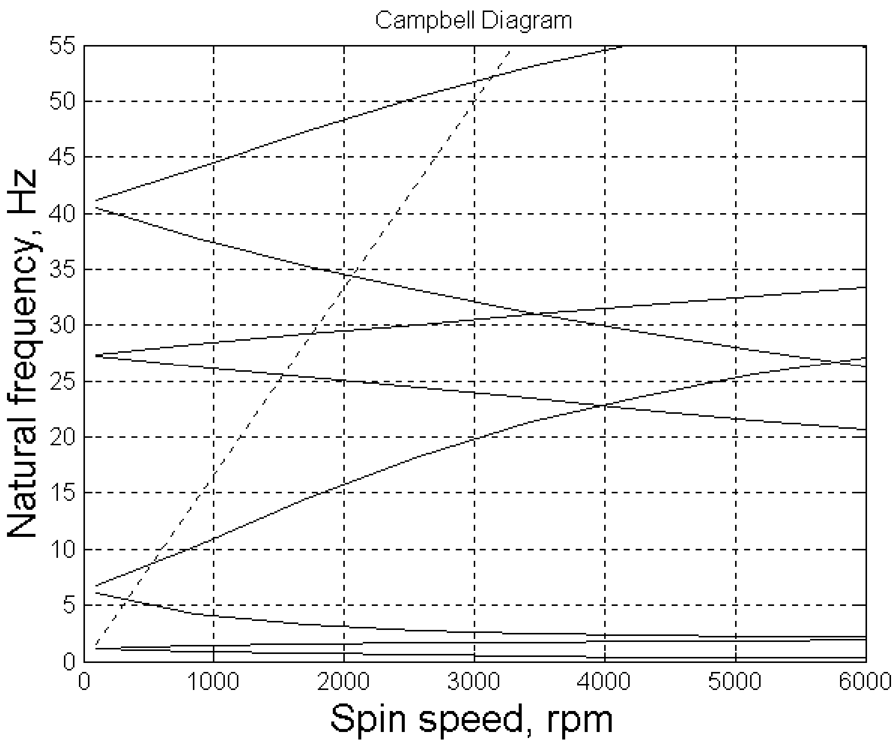


Fig.4.13

Secţiunea tronconică a fost modelată prin patru elemente conice CON 12 şi apoi CON 8, de tip Timoshenko, această variantă de discretizare fiind satisfăcătoare din punctul de vedere al preciziei rezultatelor.

Procedura de modelare a secţiunii tronconice este foarte simplă, şi mai mult, rezultate la fel de precise se pot obţine şi în urma modelării acestei secţiuni în doar două elemente finite conice.

Nu este recomandată modelarea secţiunii tronconice printr-un singur element conic, deoarece se produc erori mari.

4.2.3. Exemplul 3

În acest exemplu este prezentată o consecinţă a conicizării unui arbore. Prin conicizare se înţelege o creştere a unghiului de înclinare suprafeţei exterioare a arborelui, în condiţiile păstrării aceluiaşi volum de material.

Această „conicizare" este utilă la sculele aşchietoare pentru găurire şi frezare, pentru că astfel, frecvenţele vibraţiilor de încovoiere şi, deci, rigiditatea sculelor aşchietoare pot fi mărite considerabil faţă de cele ale arborilor de secţiune constantă având acelaşi volum şi fabricaţi din acelaşi material [207, 208].

Se consideră un arbore de formă tronconică tubulară, ca în figura 4.14, din oţel, având volumul de 59 cm^3.

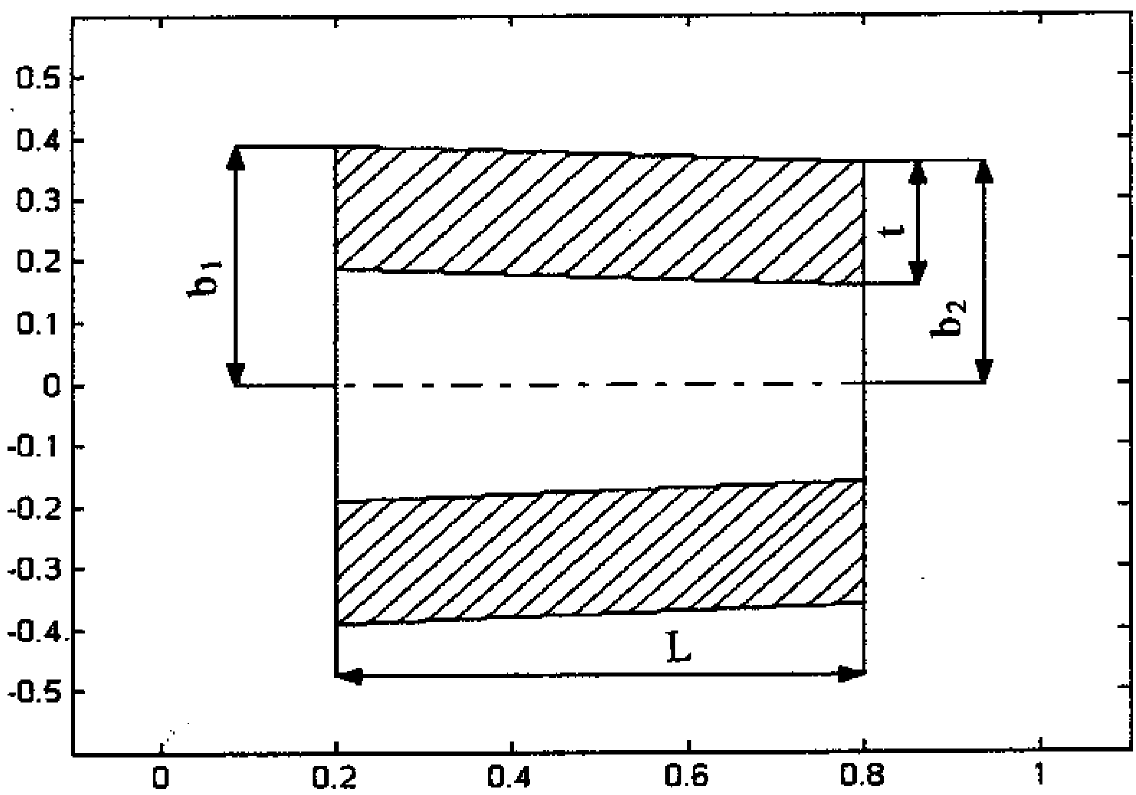


Fig.4.14

Materialul din care este confecţionat rotorul are modulul de elasticitate E = 207 GPa, densitatea ρ = 7700 kg/m^3, iar turaţia rotorului este de 400 rad/sec, adică 63,66Hz.

Se fac următoarele notaţii:

b_1 = raza exterioară mare a trunchiului de con;
b_2 = raza exterioară mică a trunchiului de con;
L = lungimea arborelui tronconic;
t = grosimea peretelui arborelui tronconic.

Se defineşte „raportul de înclinare” **TR**, sau „conicitatea arborelui”, în modul următor:

$$\mathbf{TR} = \frac{\mathbf{100\left(b_1 - b_2\right)}}{\mathbf{L}}$$

Pentru diverse valori ale raportului de înclinare, respectiv TR = 0, TR = 1, TR = 2, TR = 3 şi utilizând modelări cu diferite numere de elemente, adică 2 şi 4 elemente, s-au calculat prima pulsaţie proprie a arborelui, cu ajutorul programului DRACULA şi s-a reprezentat grafic variaţia acesteia cu conicitatea arborelui.

Pentru ca arborele studiat să-şi păstreze volumul constant de 59 cm^3, s-au menţinut constante următoarele mărimi:

$$t = 5.4 \text{ mm};$$
$$L = 240 \text{ mm};$$
$$b_1+b_2 = 20 \text{ mm}.$$

Mărimi variabile au fost doar razele exterioare ale arborelui tronconic, b_1 şi b_2.

În figura 4.15 s-a arătat valorile primei pulsaţii proprii a rotorului pentru diferite conicităţi şi discretizări ale acestuia.

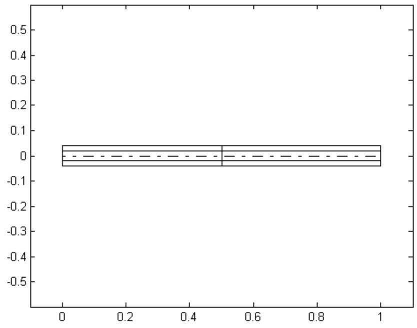
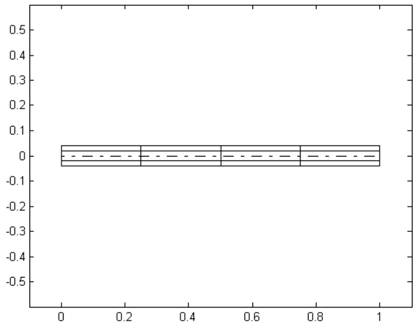
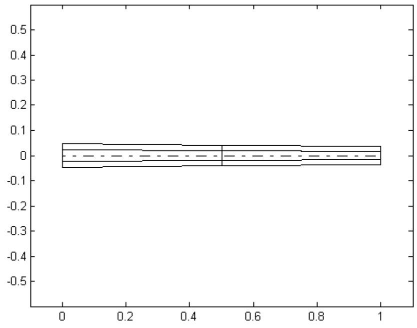
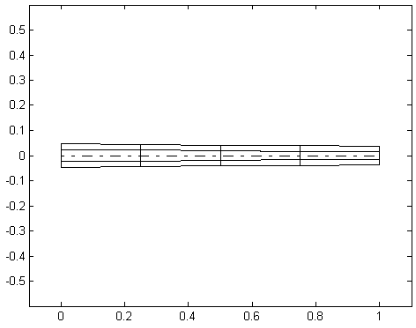
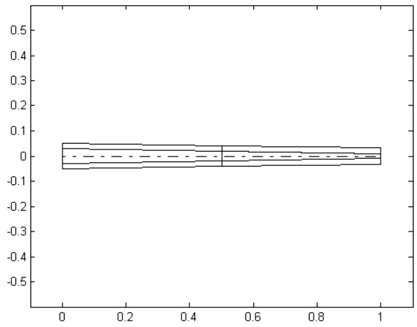
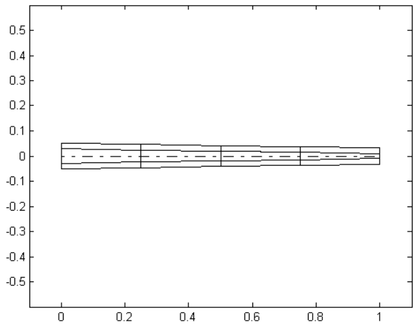
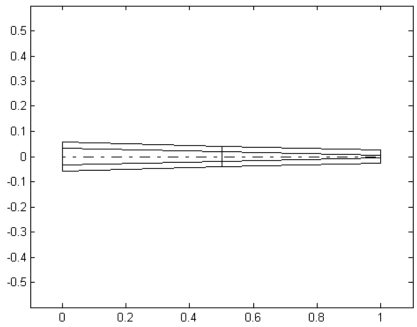
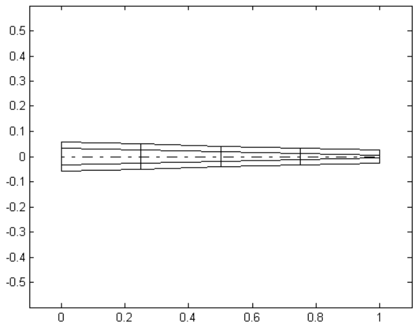
b_1=10mm b_2=10mm TR = 0	 p_0 = 1766.4 Hz	 p_0 = 1764.3 Hz
b_1=11.2mm b_2=8.8mm TR = 1	 p_1 = 1769.6 Hz	 p_1 = 1764.6 Hz
b_1=12.4mm b_2=7.6mm TR = 2	 p_2 = 1780.1 Hz	 p_2 = 1766.6 Hz
b_1=13.6mm b_2=6.4mm TR = 3	 p_3 = 1799.7 Hz	 p_3 = 1774.6 Hz

Fig.4.15

Concluzia care se poate trage în urma acestui studiu este că, odată cu creşterea conicităţii arborelui, în cazul folosirii aceluiaşi volum de material, valoarea primei pulsaţii proprii a acestuia creşte, deci rigiditatea arborelui creşte, avantajul imediat fiind acela că o sculă aşchietoare, realizată în condiţiile amintite, poate lucra la turaţii mai înalte în condiţii de siguranţă.

În figura 4.16 s-a reprezentat grafic dependenţa raportului pulsaţiilor proprii $\frac{\mathbf{p_i}}{\mathbf{p_0}}$ cu **i=0, 1, 2, 3**, de conicitatea arborelui **TR**.

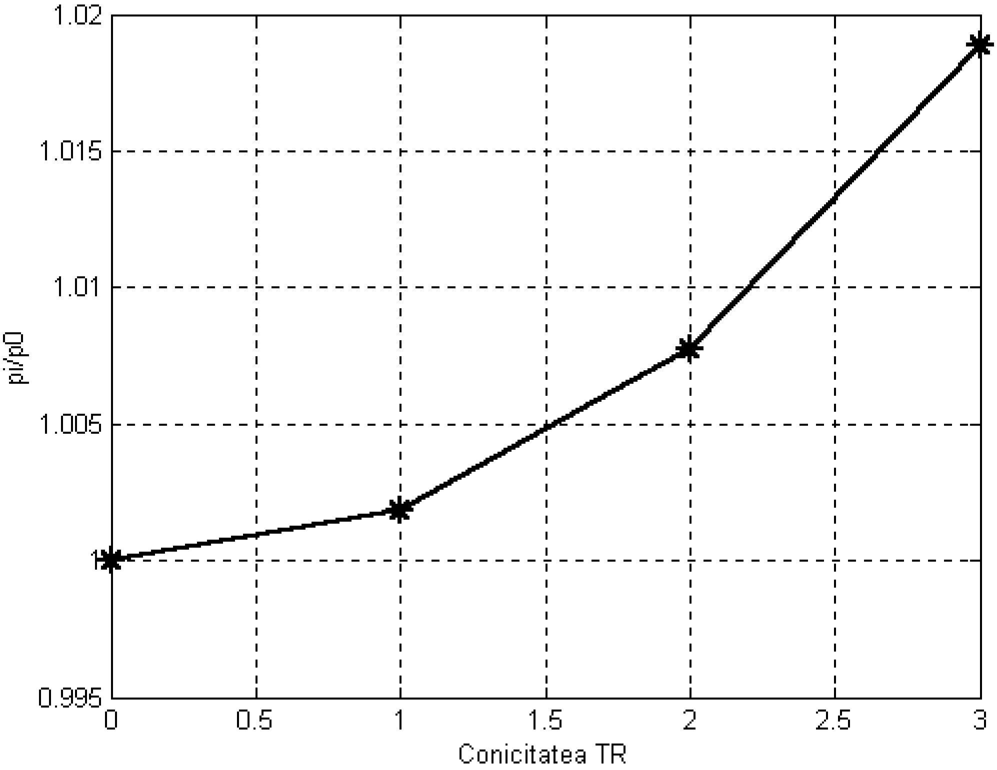


Fig.4.16

Se observă tendinţa crescătoare a raportului p_i/p_0 cu mărirea conicităţii arborelui, deci creşterea rigidităţii rotorului, respectiv a sculei aşchietoare.

4.3. Studiul modurilor mixte de precesie

Exemplul de simulare numerică a fost prezentat pentru a ilustra modul în care un cuplaj de tip conservativ produce moduri de precesie mixtă. Studiul a fost efectuat cu ajutorul programului de calcul DRACULA, realizat în MATLAB, program bazat pe modelarea cu elemente finite a sistemelor rotor-lagăre, capabil să sorteze modurile cu precesie directă, inversă sau mixtă.

În dinamica sistemelor rotor-lagăre, mişcarea de revoluţie a rotorilor se numeşte precesie directă (forward), dacă are acelaşi sens cu rotaţia rotorului în jurul propriei axe, şi precesie indirectă (backward) – dacă are sens contrar rotaţiei.

Deşi sensul mişcării de precesie este o proprietate locală, ce caracterizează un punct dat al rotorului, şi nu una globală, modurile proprii de precesie ale unui rotor se numesc, pe scurt, moduri directe (cu precesie directă) şi moduri inverse (cu precesie inversă).

Cu toate acestea este cunoscut faptul că, la o anumită turaţie, unele secţiuni ale rotorului pot avea o mişcare de precesie directă, în timp ce alte secţiuni au o precesie inversă, fără torsiunea arborelui [16]. Moduri de precesie mixtă (directă+inversă) au fost semnalate de Lund [111] şi menţionate recent de Jei şi Kim [206] şi Dias şi Allemang [217, 218]. Explicaţia constă în faptul că, la multe maşini cu rotor, modurile de precesie sunt într-adevăr moduri pure directe sau inverse, sensul precesiei fiind acelaşi în toate punctele în lungul rotorului. Aceasta permite o clasificare logică a modurilor proprii, care poate fi extinsă la moduri de precesie predominant (nu total) directe sau inverse.

Sistemele rotor-lagăre nesimetrice şi cu lagăre anizotrope au moduri de precesie mixtă produse de cuplaje datorite momentelor giroscopice şi rigidităţilor de cuplaj ale lagărelor. Amortizarea din lagăre complică fenomenul, modificând alternanţa normală a modurilor inverse cu cele directe.

În primul studiu detaliat în care se semnalează existenţa modurilor de precesie mixtă [111], Lund a analizat un compresor centrifugal cu 8 trepte, cu console la capetele rotorului şi cu centrul de greutate situat aproximativ la mijlocul distanţei între lagăre. Un astfel de sistem trebuie modelat cu cel puţin 12 noduri, deci suficient de detaliat pentru a pune în evidenţă modurile mixte.

La un rotor real, în lagăre cu alunecare, cea mai mică asimetrie produce valori diferite ale încărcării şi temperaturii uleiului în lagăre. Deci chiar în cazul unor lagăre constructiv identice, coeficienţii de rigiditate şi de amortizare sunt diferiţi pentru cele două lagăre ale unui rotor.

Rezultă că pentru asimetrii uzual întâlnite în practică, curbele frecvenţelor proprii amortizate din diagrama Campbell nu se mai intersectează, cuplajele intermodale producând forme specifice de diagrame, în care curbele se

apropie una de alta şi se îndepărtează fără să se intersecteze („curve veering”). În zona de apropiere relativă a frecvenţelor proprii, variaţia bruscă (dar continuă) cu turaţia a formei modurilor proprii de precesie produce moduri mixte.

Pentru a ilustra natura modurilor mixte şi evoluţia lor cu variaţia turaţiei rotorului, se consideră un rotor nesimetric pe lagăre anizotrope, similar cu cel studiat în [209]. Un disc rigid este montat la mijlocul unui arbore de secţiune constantă, de lungime 0,44 m, diametrul 9 mm, modul de elasticitate longitudinal $\mathbf{2 \cdot 10^{11}\ N/m^2}$ şi densitate $\mathbf{7800\,kg/m^3}$, figura 4.17.

Masa discului este 560 kg iar momentele de inerţie masice sunt 18 kgm^2 cel diametral şi 36 kgm^2 cel polar.

Rotorul este rezemat la capete în lagăre ortotrope, ai căror coeficienţi de rigiditate şi amortizare sunt consideraţi independenţi de turaţie.

S-au calculat modurile proprii de precesie pentru două grupuri de valori ale proprietăţilor dinamice ale lagărelor.

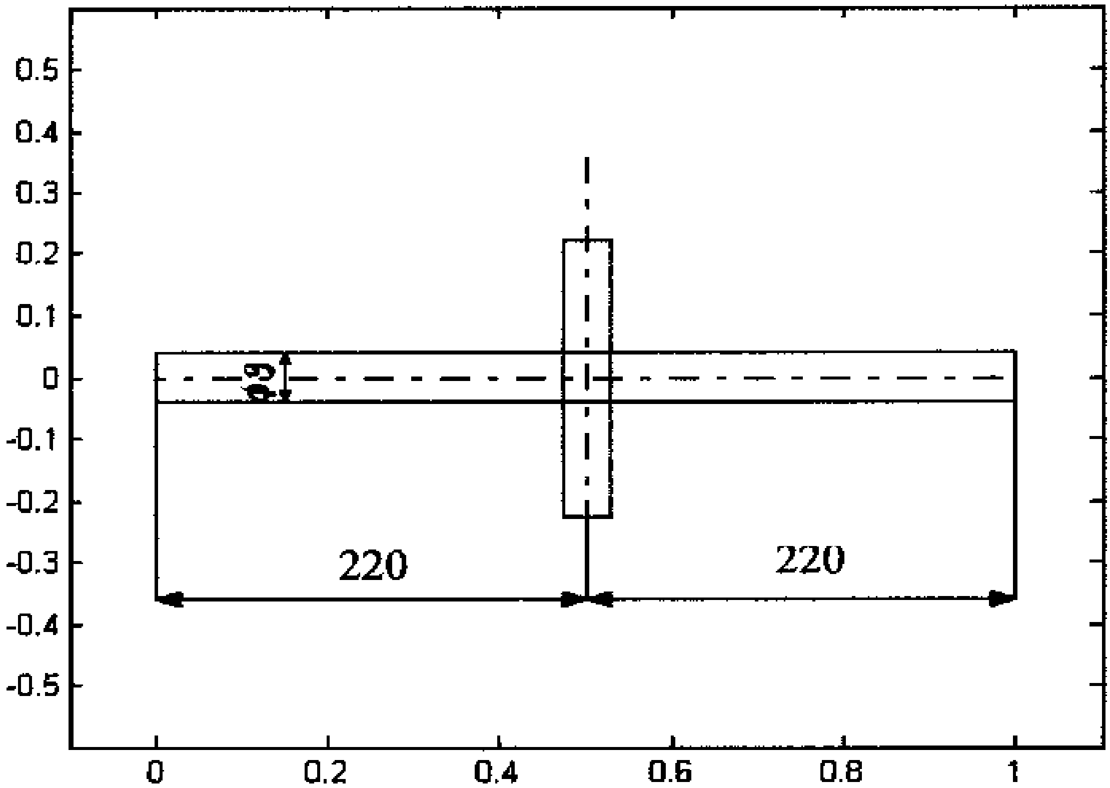


Fig.4.17

Cazul a : Lagăre identice:

$$\mathbf{k_{yy} = 2{,}2 \cdot 10^8\ N/m, \qquad k_{zz} = 1{,}1 \cdot 10^8\ N/m,}$$

$$\mathbf{c_{yy} = 2{,}2 \cdot 10^4\ Ns/m, \qquad c_{zz} = 1{,}1 \cdot 10^4\ Ns/m.}$$

Cazul b : Lagăre puţin diferite:

$$\mathbf{k'_{yy} = 2{,}15 \cdot 10^8\ N/m,\qquad k'_{zz} = 1{,}15 \cdot 10^8\ N/m,}$$

$$\mathbf{c'_{yy} = 2{,}15 \cdot 10^4\ Ns/m,\qquad c'_{zz} = 1{,}15 \cdot 10^4\ Ns/m,}$$

$$\mathbf{k''_{yy} = 2{,}25 \cdot 10^8\ N/m,\qquad k''_{zz} = 1{,}05 \cdot 10^8\ N/m,}$$

$$\mathbf{c''_{yy} = 2{,}25 \cdot 10^4\ Ns/m,\qquad c''_{zz} = 1{,}05 \cdot 10^4\ Ns/m.}$$

Indicii prim şi secund denotă lagărul din stânga, respectiv lagărul din dreapta.

Variaţia frecvenţelor proprii amortizate şi a rapoartelor de amortizare modale pentru primele două moduri, în funcţie de turaţie, este prezentată în figura 4.18 (Cazul a) şi figura 4.19 (Cazul b). Datorită ortotropiei, fiecare mod de precesie al rotorului constă de fapt din două moduri, unul cu precesie inversă, altul cu precesie directă, identificate pe curbe prin literele „B” (backward), respectiv „F” (forward).

Când lagărele au aceleaşi caracteristici dinamice (Fig.4.18), curba 2.B intersectează dreptele 1.F şi 1.B. Nu există cuplaj între modul conic 2.B şi modurile cilindrice 1.F şi 1.B. În figura 4.18.b, curbele rapoartelor de amortizare nu se intersectează.

Când lagărele au caracteristici dinamice puţin diferite (Fig.4.19.a), curba 2B intersectează dreapta 1.F la aproximativ 500 rot/min, dar se apropie de dreapta 1.B la 1900 rot/min, apoi se depărtează. În figura 4.19.b, curbele modurilor 2.B şi 1.F nu se intersectează, dar au un minim, respectiv un maxim, la 500 rot/min, dovedind o interacţiune între moduri, în timp ce curbele 2.B şi 1.B se intersectează la 1900 rot/min, confirmând cuplajul modal.

Evoluţia formelor proprii în zonele de turaţii cu interacţiune modală este prezentată în figurile 4.20 - 4.24. Deoarece rotorul a fost modelat cu 4 elemente de arbore de lungimi egale, s-au trasat orbitele de precesie în cele 5 noduri. De asemenea, s-a trasat deformata în spaţiu a rotorului la momentul t=0 (linie continuă) şi forma modală la $t=\pi/2\omega$, după un sfert de perioadă (linie întreruptă). Deci mişcarea de precesie în lungul elipselor se face de la punctul situat pe linia continuă, la punctul de pe linia întreruptă. În cazul modurilor mixte, în dreptul fiecărei elipse s-a notat sensul precesiei F-directă, B-inversă.

În figura 4.20 se prezintă evoluţia modului 1.M între 1700 şi 3000 rot/min. Modul 1M rezultă din cuplarea unui mod conic vertical, cu un mod cilindric orizontal care, odată cu creşterea turaţiei rotorului, se transformă în mod conic orizontal.

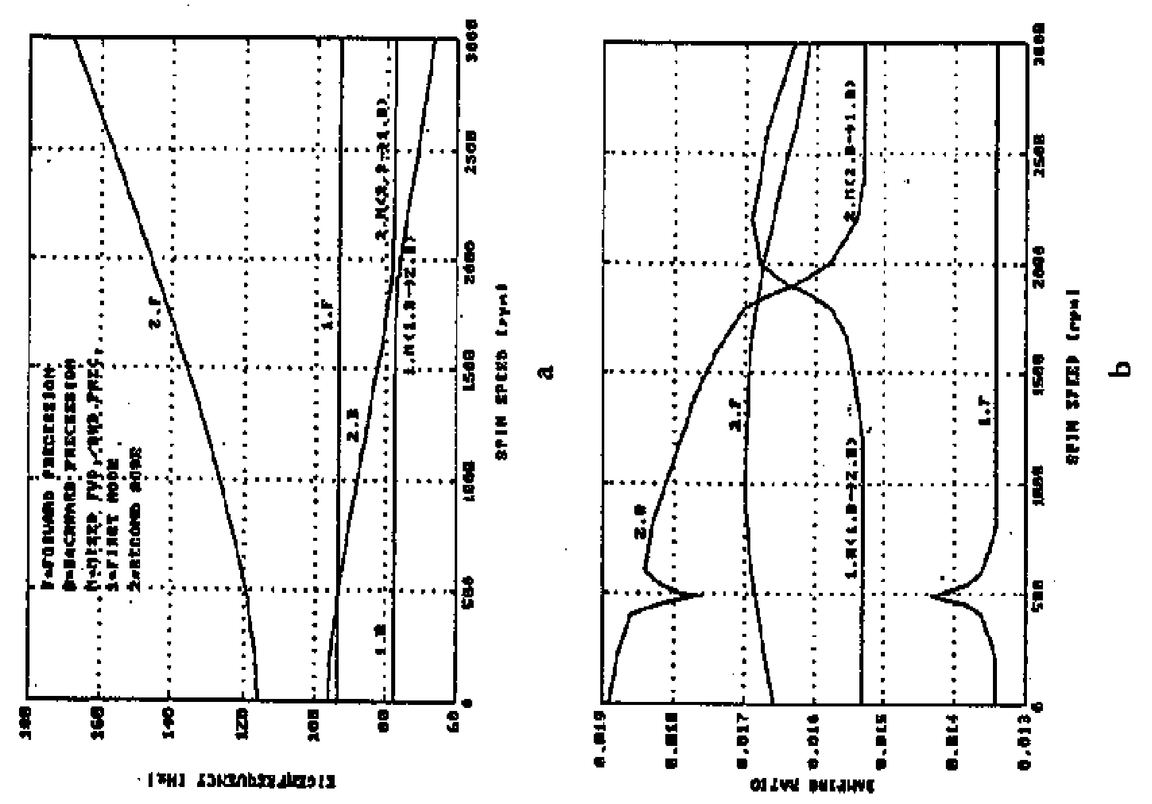


Fig.4.19

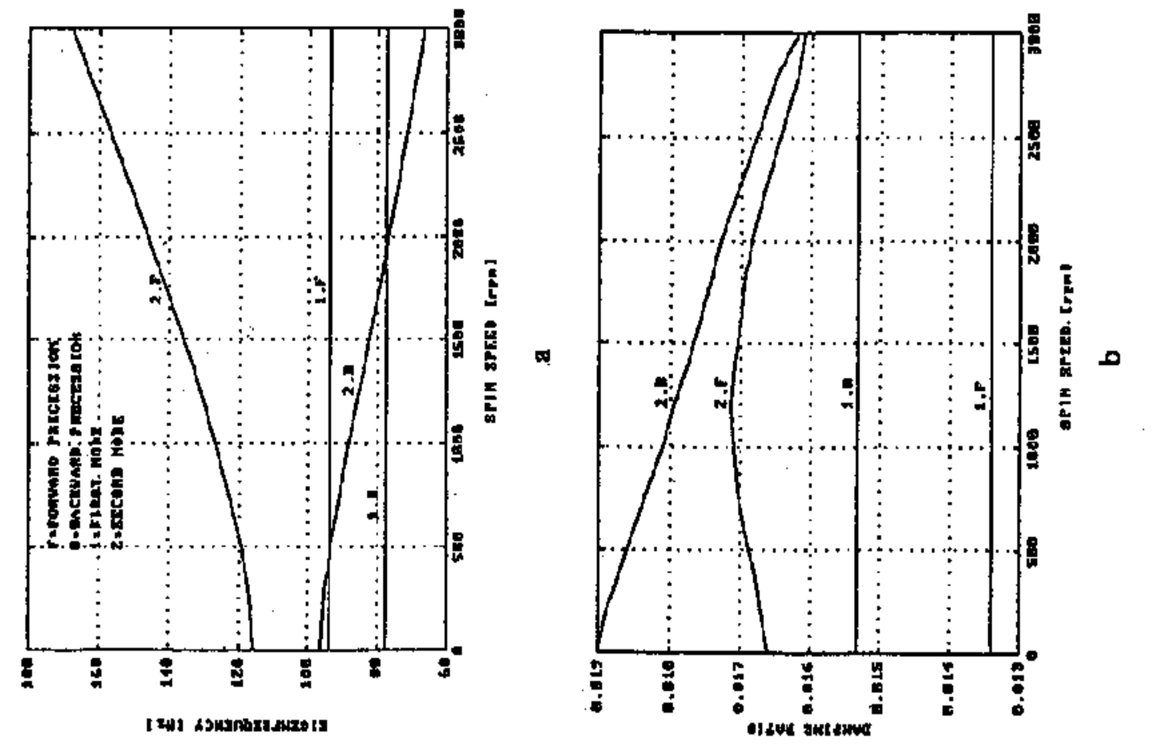


Fig.4.18

La 1700 rot/min, traiectoria discului de la mijlocul rotorului este aproape linie dreaptă, marcând trecerea de la precesie directă (în stânga) la precesie indirectă (în dreapta). La 1900 rot/min, axa orizontală a elipsei din stânga scade, modul cilindric devenind un mod conic cu nodul în afara rotorului.

La 2000 rot/min, modul orizontal este un mod conic, cu nodul între capetele rotorului. Cele două moduri conice, vertical şi orizontal, intersectează axa rotorului în puncte diferite, în care orbitele degenerează în linii drepte. Modul mixt corespunzător are 3 zone alternative de precesie inversă, directă şi din nou inversă. Pe măsură ce turaţia creşte, nodul modului conic orizontal se apropie de mijlocul rotorului, modul mixt de precesie devenind predominant 2.B.

În figura 4.21 se prezintă evoluţia modului 2.M între 1700 şi 3000. La 1700 rot/min modul este încă 2.B. Creşterea turaţiei determină o modificare a modului conic orizontal. La 1880 rot/min, capătul din dreapta devine nod, deci elipsa este degenerată în linie dreaptă, apoi modul orizontal devine cilindric. Deoarece modul vertical rămâne conic, modul de precesie este mixt şi la 300 rot/min.

În figura 4.22 se arată evoluţia modului 2.M între 400 şi 600 rot/min. Dacă în figurile 4.20 şi 4.21 modurile erau aproape plane, în acest caz se observă caracterul spaţial al modurilor de precesie ale rotorilor cu amortizare în lagăre.

Deşi curbele frecvenţelor proprii se intersectează şi modul este predominant invers (2.B), la 490 şi respectiv 540 rot/min el devine mod mixt. Modul conic vertical evoluează prin deplasarea nodului spre capătul din dreapta al rotorului, în timp ce deformata la t=0 are o evoluţie spaţială mai complicată.

În figura 4.23 se arată evoluţia modului 3.M între 480 şi 600 rot/min, rezultând din combinaţia unui mod cilindric predominant vertical, cu un mod conic orizontal. Variaţia fazei modului conic între 490 şi 500 rot/min inversează brusc zonele de precesie directă şi inversă în lungul rotorului.

După cum s-a mai arătat, caracterul mixt al unui mod de precesie poate fi omis dacă numărul punctelor în care se calculează sensul mişcării de precesie este insuficient. În figura 4.24 se arată al doilea mod propriu al sistemului analizat, la 1700 rot/min. Dacă modelul are numai 5 noduri, modul apare de precesie inversă. Dacă se consideră încă un nod, între disc şi mijlocul jumătăţii din dreapta rotorului, atunci orbita acestuia fiind parcursă în sens contrar celorlalte, se pune în evidenţă caracterul mixt al modului respectiv.

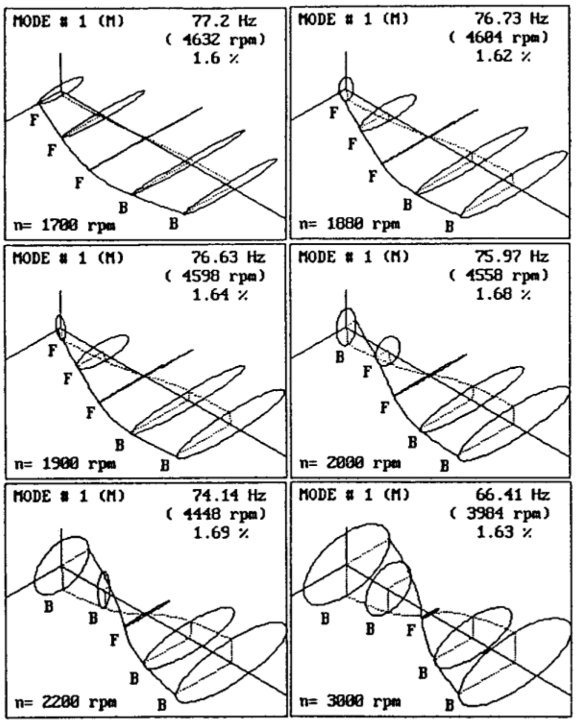


Fig.4.20

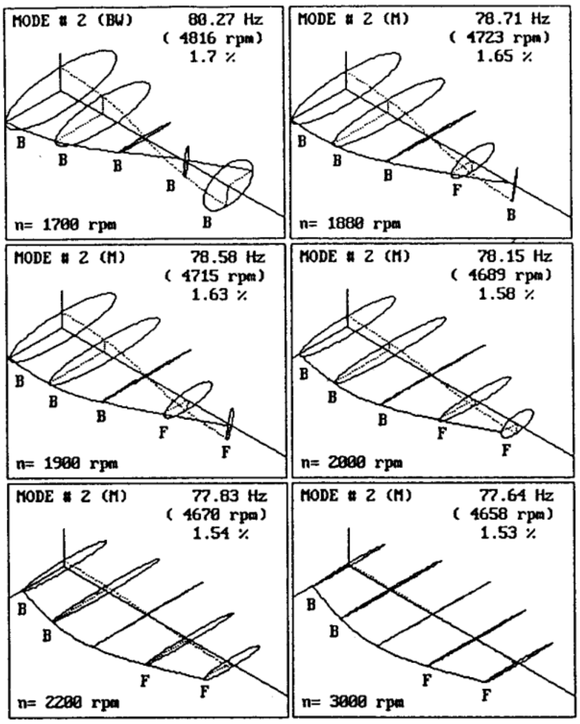


Fig.4.21

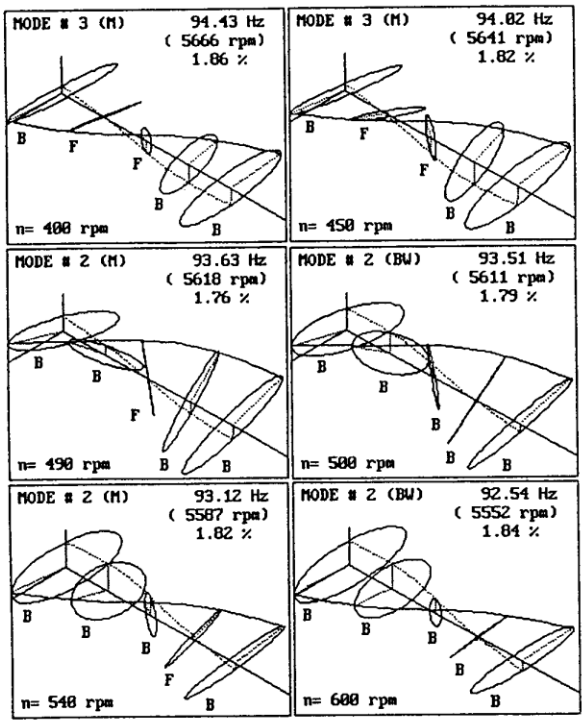


Fig.4.22

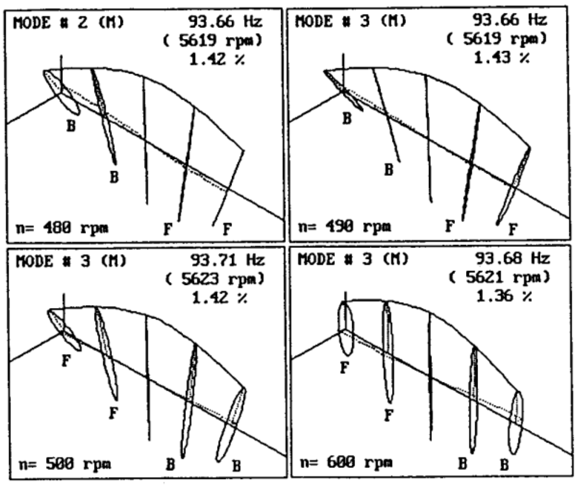


Fig.4.23

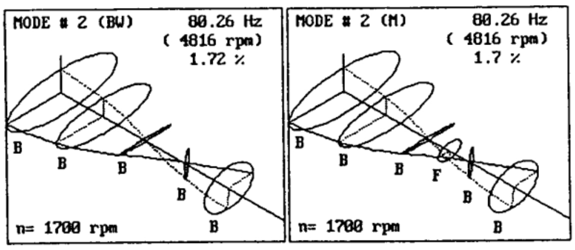


Fig.4.24

Concluzia principală a studiului este următoarea: ortotropia statorului produce rigidităţi dinamice diferite, deci deformate dinamice diferite, ale rotorului, în două direcţii ortogonale, la aceeaşi turaţie. Cuplarea a două forme proprii (chiar puţin) diferite ale rotorului din două plane ortogonale produce moduri de precesie mixtă.

Acest lucru se poate explica mai uşor pentru sisteme giroscopice conservative, care au moduri de precesie plane. În acest caz, deformatele în două plane ortogonale corespund formelor modale la două momente având o diferenţă de timp de un sfert de perioadă de precesie. Dacă cel puţin una din cele două curbe intersectează axa rotorului pe lungimea acestuia, atunci, în punctul respectiv, orbita de precesie degenerează intr-o linie dreaptă, care separă zonele de precesie directă şi inversă în lungul rotorului.

Probabil că modurile de precesie mixtă au fost neglijate în trecut deoarece sistemele rotor-lagăre considerate în exemplele teoretice erau fie simetrice, fie cu lagăre izotrope, iar mişcarea era analizată într-un număr relativ redus de puncte în lungul rotorului. În multe cazuri, modurile mixte sunt predominant directe sau inverse, cu zone reduse de precesie în sens contrar, astfel că, dacă numărul nodurilor într-un model cu elemente finite este redus, atunci nu se observă caracterul mixt al modului de precesie respectiv.

5. Rezultate experimentale

În acest capitol, sunt prezentate rezultatele obţinute de autoare în urma unor încercări în laboratorul Catedrei de Rezistenţa materialelor din Universitatea "Politehnica" din Bucureşti, încercări efectuate pe un Rotor Kit, producţie a firmei Bently Nevada.

În prima parte a capitolului este descris standul de încercări, cu posibilităţile şi caracteristicile funcţionale şi sunt puse în evidenţă particularităţile importante ale sistemului rotor-lagăre.

În cea de a doua parte a acestui capitol sunt prezentate rezultatele experimentale obţinute în urma măsurărilor din laborator şi o comparaţie a acestora cu rezultatele obţinute, pentru acelaşi rotor, utilizând programul DRACULA în MATLAB.

5.1. Standul rotoric Bently Nevada

Standul folosit este un ROTOR KIT BENTLY NEVADA (model nr. 24755). În continuare sunt prezentate caracteristicile generale ale standului şi o scurtă descriere a acestuia.

<u>Caracteristici generale ale standului:</u>

Caracteristici mecanice

-Turaţia motorului	-până la	12 000 rot/min;
-Dimensiuni	-lungime	787 mm;
	-lăţime	152 mm;
	-înălţime	168 mm.

Caracteristici electrice

-Motorul electric	-220 V, 50 Hz;
-Traductorul fără contact	-la ieşire: 18 V ± 1 V la max. 100 mA.

Greutăţi

-Rotor (fără fundaţie)	13,80 kg;
-Discul mare	0,81 kg;
-Discul mic	0,605 kg;
-Lagărul de alunecare plus sistemul de ungere	1,87 kg;
-Sistemul pentru modelarea fenomenelor aerodinamice	0,74 kg;
-Placa cu amplificatoarele traductorilor	2,21 kg.

Accesorii

-Tahometru N 2603;
-Osciloscop TEKTRONIX 2205.

<u>Descrierea standului:</u>

Standul este prezentat schematizat în figura 5.1. Se disting următoarele părţi mai importante:

1. motorul de acţionare al arborelui;
2. traductorul de control al turaţiei arborelui;
3. traductorul pentru semnalul de fază;
4. şurubul de simulare a frecărilor între rotor şi stator;
5. discul mare şi cel mic;
6. traductorii de deplasare, fără contact, montaţi pe direcţiile Y-Z;
7. cutia de comandă a turaţiei motorului;
8. cuplajul elastic motor-arbore;
9. lagărul
10. placa de bază.

Standul a fost prins prin placa sa de bază cu şuruburi de o fundaţie realizată prin turnarea de ciment într-o cutie de lemn. În scopul manevrării uşoare a conexiunilor electrice, placa pe care se află montate amplificatoarele, care amplifică semnalele traductorilor, a fost fixată de o laterală a cutiei de lemn, figura 5.2.

Turaţia motorului electric de acţionare poate varia continuu între limitele 1200 ÷ 12000 rot/min, existând posibilităţi de modificare a ratei de creştere sau de scădere a turaţiei într-o plajă de turaţii prestabilită, sau de menţinere a ei la o valoare constantă.

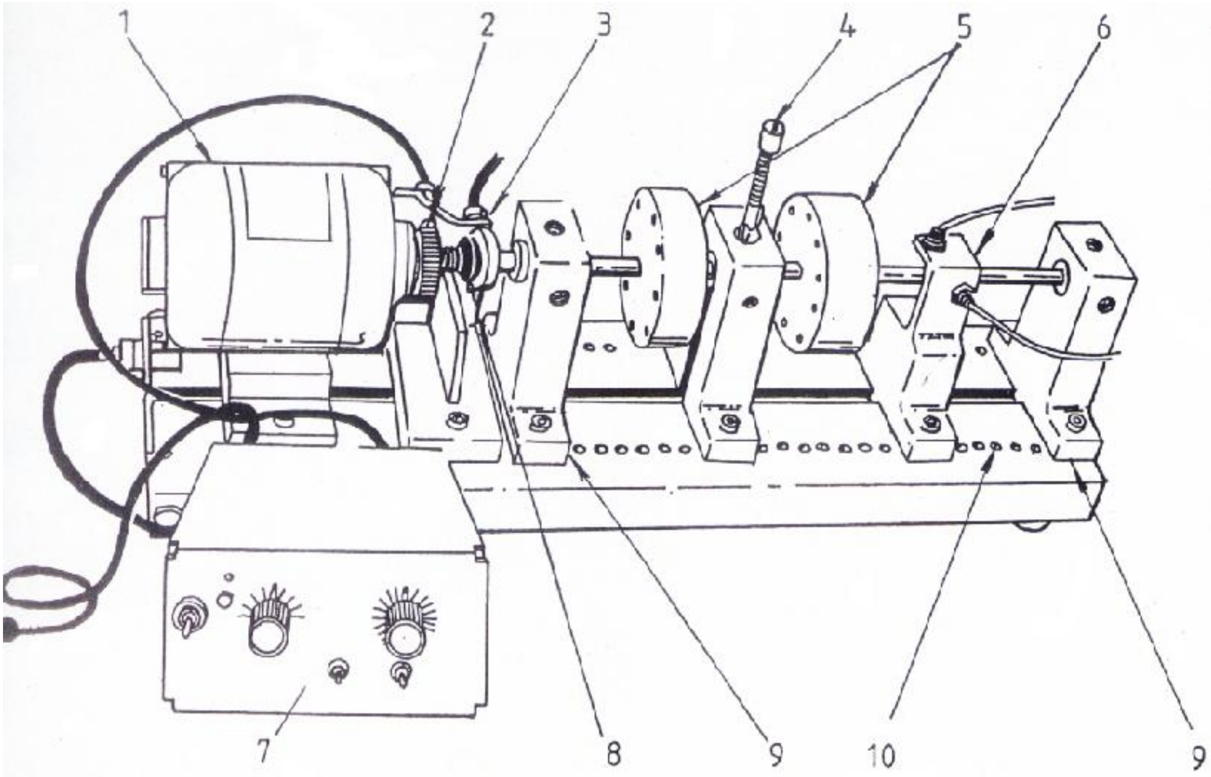

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
9

Fig.5.1

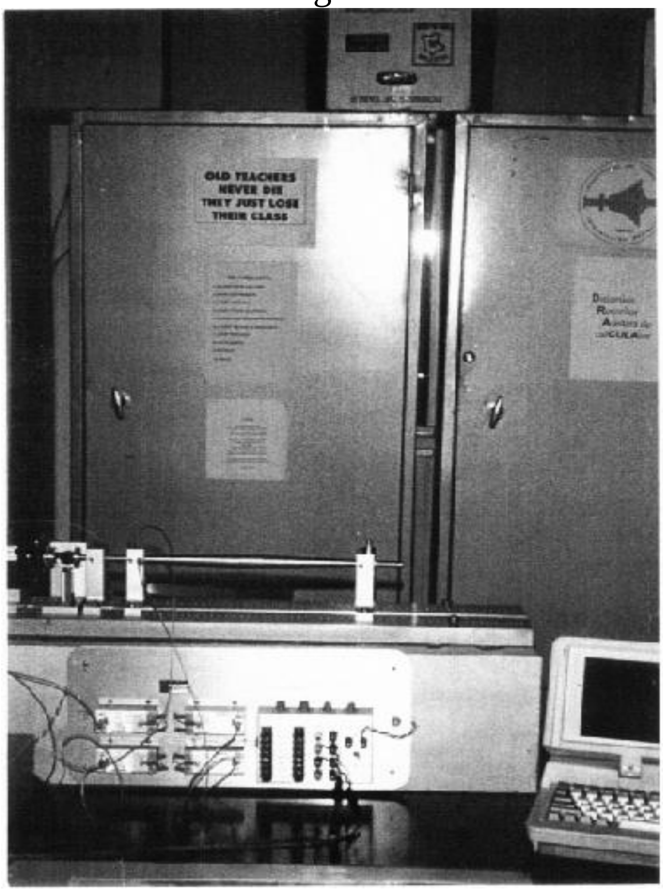

OLD TEACHERS
NEVER DIE
THEY JUST LOSE
THEIR CLASS

Fig.5.2

Lagărele, notate cu 9 în figura 5.1, deşi aparent rigide, caracteristicile lor dinamice se apropie mai degrabă de cele ale lagărelor cu alunecare decât ale celor cu rulmenţi. Astfel, aşa cum se observă din figura 5.3, lagărul îi permite totuşi arborelui o rotire relativ mică – bucşa de bronz grafitat, fiind prinsă elastic de corpul lagărului, are posibilitatea de a se roti în jurul unei axe perpendiculare pe axa lagărului, atât cât îi permite jocul dat de cotele de execuţie ale celor două piese.

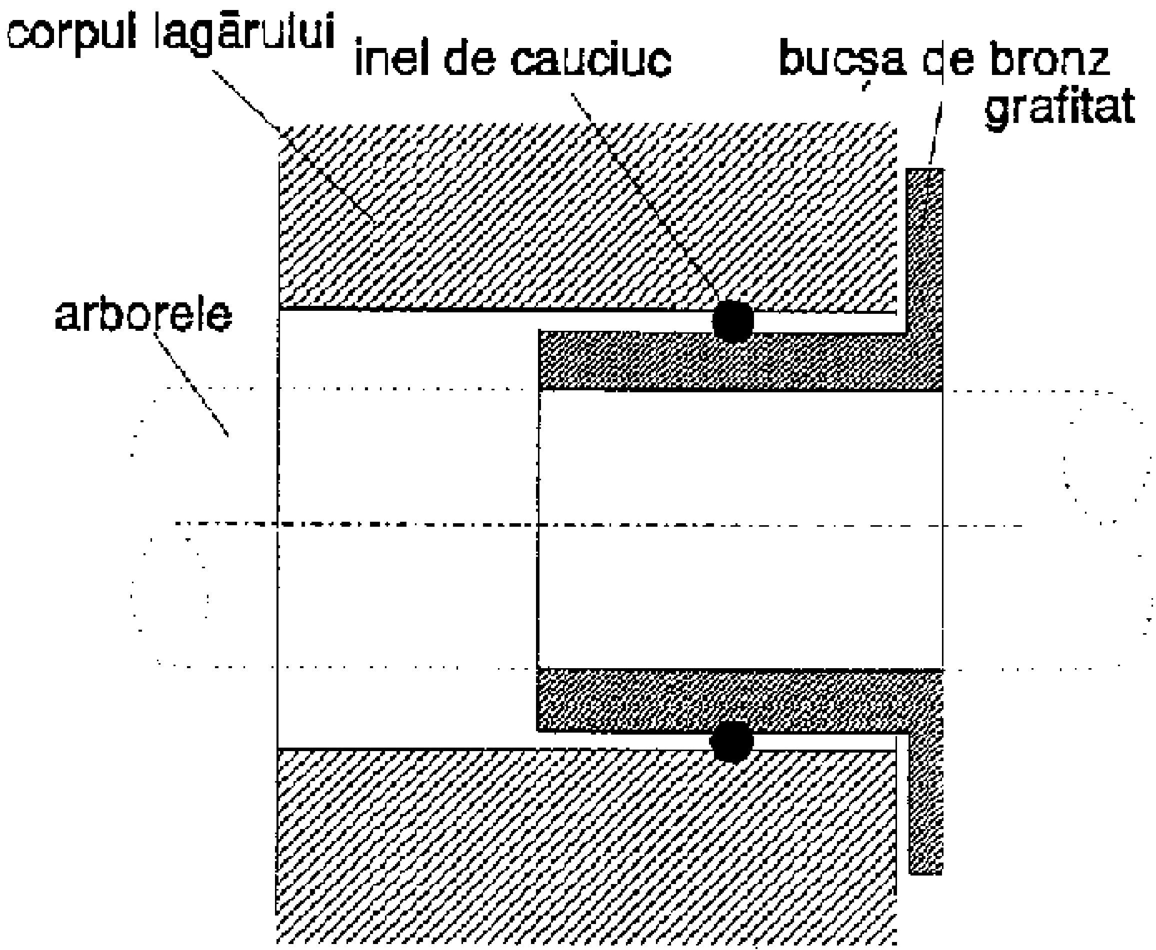


Fig.5.3

În plus, inelul de cauciuc duce la modificări importante ale caracteristicilor dinamice ale lagărului cu turaţia, atât ale rigidităţii, cât şi ale amortizării. Variaţia acestora cu turaţia arborelui a fost determinată experimental de către producător pentru acest tip de lagăr şi este reprodusă în figura 5.4, cu observaţia că valorile coeficienţilor dinamici se modifică odată cu accentuarea uzurii bucşei de bronz grafitat.

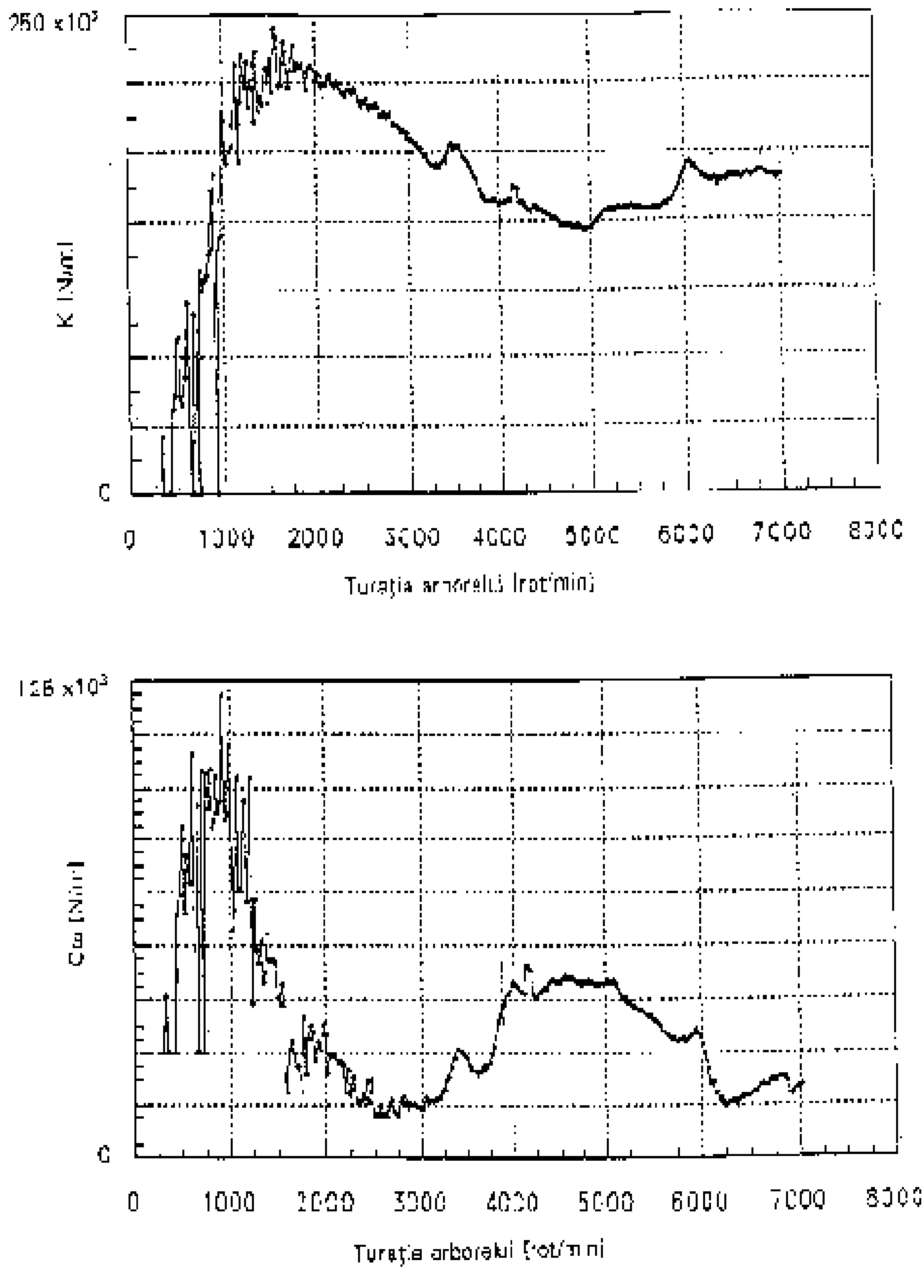

250 x10³
K [N/m]
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
126 x10³
0
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000

Fig. 5.4

5.2. Modul de lucru

Măsurătorile efectuate au avut ca scop determinarea practică a turaţiei critice a unui rotor din oţel având secţiuni conice şi compararea acesteia cu turaţia critică obţinută în urma simulării numerice cu programul DRACULA în MATLAB.

Schema lanţului de măsură utilizat este prezentată în figura 5.5.

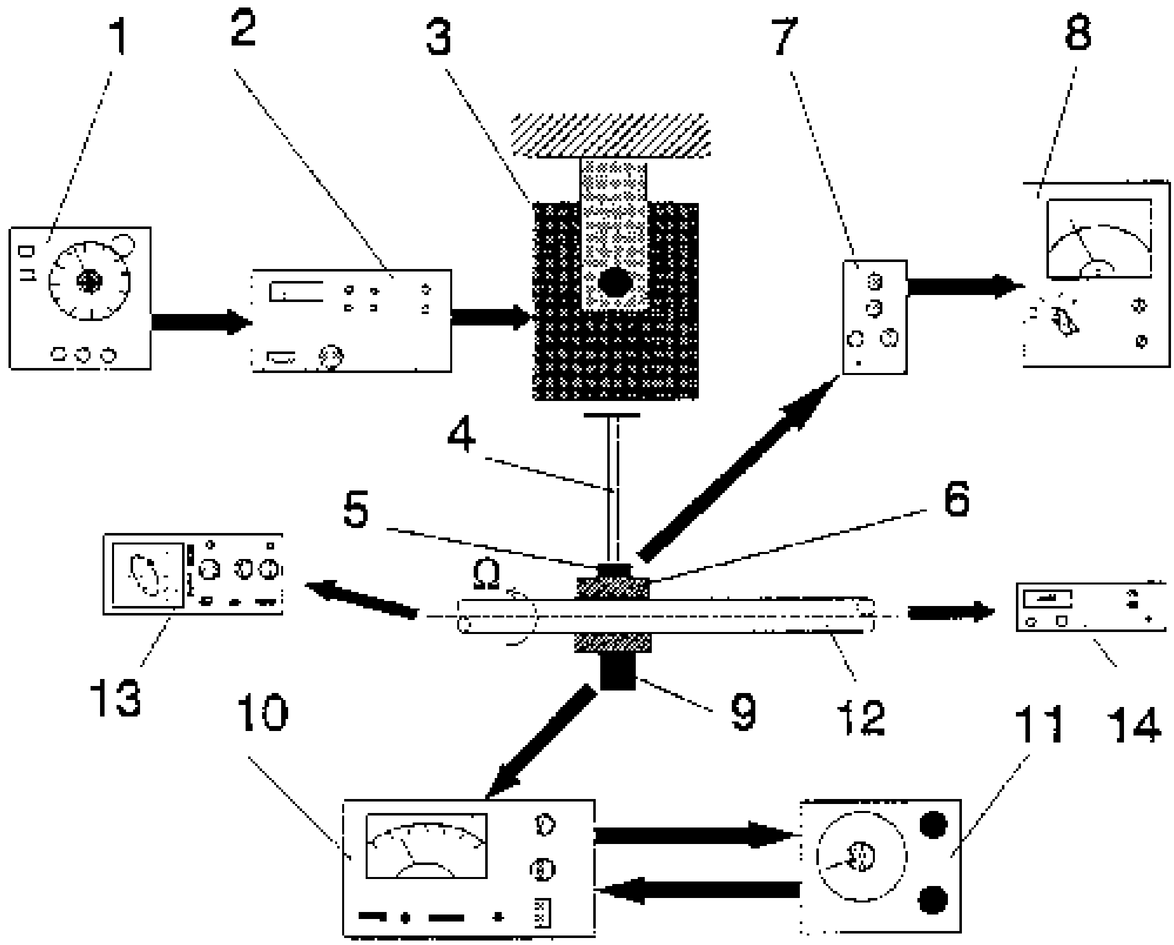


Fig.5.5

În figura 5.5 s-au reprezentat: 1-Generator de frecvenţă GF22; 2-Amplificator LV103; 3-Vibrator electromagnetic VEB RFT; 4-Tijă; 5-Captor de forţă 8200 B&K; 6-Inel de bronz; 7-Amplificator de sarcină 2626 B&K; 8-Voltmetru ORV2-RFT; 9-Captor de acceleraţii 4370 B&K; 10-Vibrometru 2511 B&K; 11-Filtru trece bandă 1621 B&K; 12-Arbore; 13-Osciloscop Tektronix 2205; 14-Tahometru N 2603.

Aparatura utilizată se poate observa şi în vederea de ansamblu din figura 5.6.

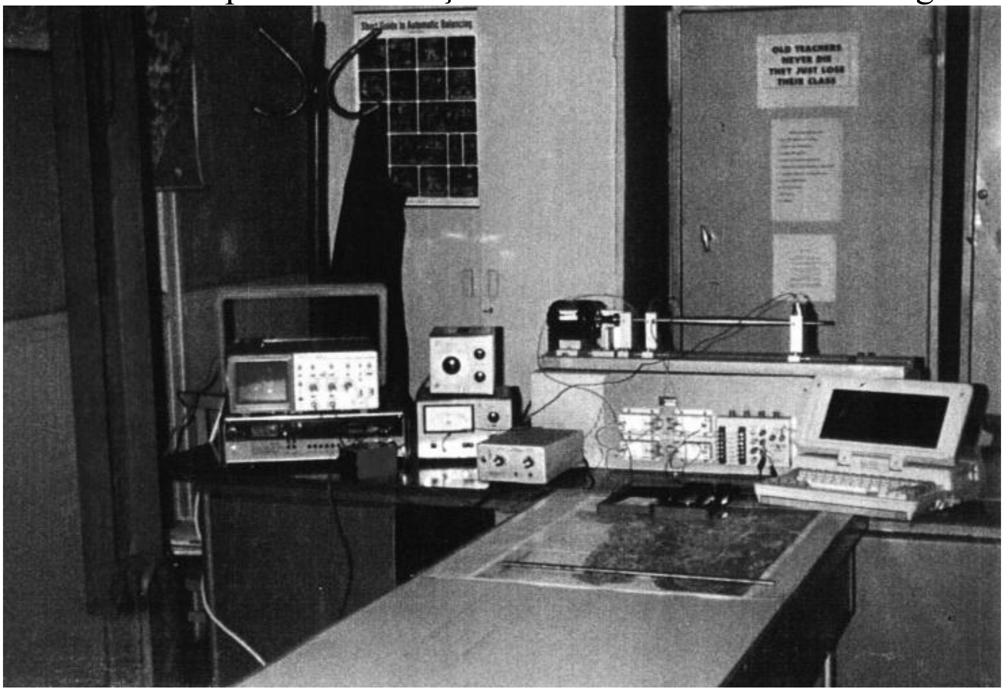


Fig.5.6

S-a procedat în modul următor: S-a măsurat deplasarea absolută pe lagărul rotorului cu ajutorul unui accelerometru piezoelectric tip 4370 B&K şi un vibrometru 2511 B&K legat la un filtru trece bandă acordabil tip 1621 B&K (Fig.5.7).

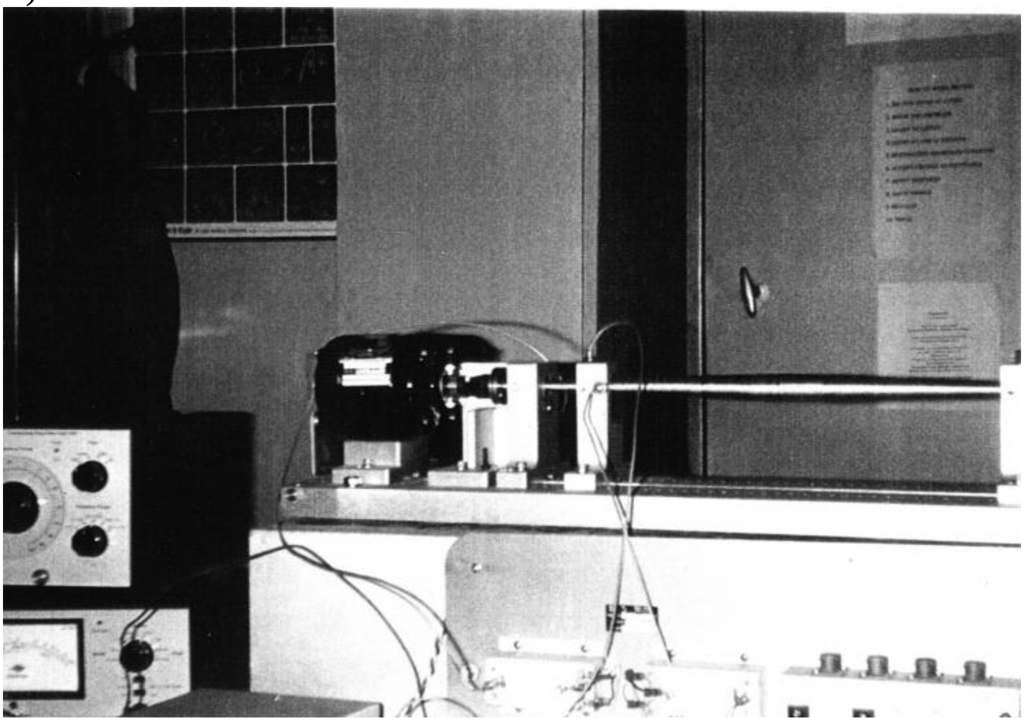


Fig.5.7

În figura 5.7 se poate observa şi cuplajul elastic ce există între motor şi arbore.

Turaţia a fost măsurată cu tahometrul tip N 2603 şi captorii fără contact de tip Bently Nevada cu care este echipat standul. S-a putut vizualiza orbita mişcării de precesie a centrului arborelui într-o secţiune din vecinătatea lagărului, pe ecranul unui osciloscop Tektronix 2205 (Fig.5.8).

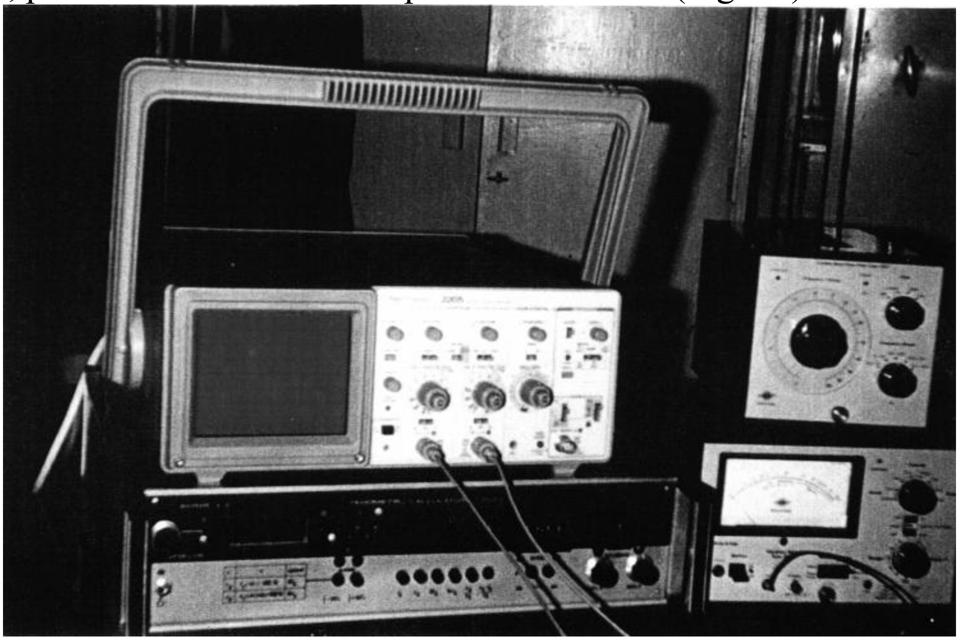


Fig.5.8

Orbita eliptică a mişcării de precesie a arborelui conic se observă mai clar în figura 5.9.

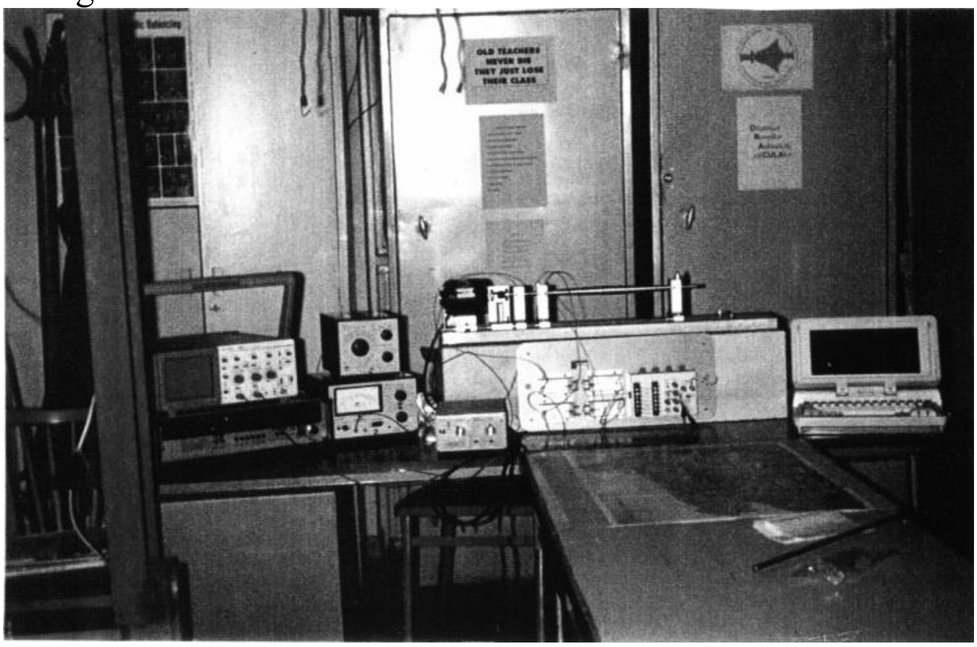


Fig.5.9

Semnalul electric preluat de la vibrometru a fost înregistrat pe hard disk-ul unui laptop (Fig.5.10), prevăzut cu placă de achiziţie de date.

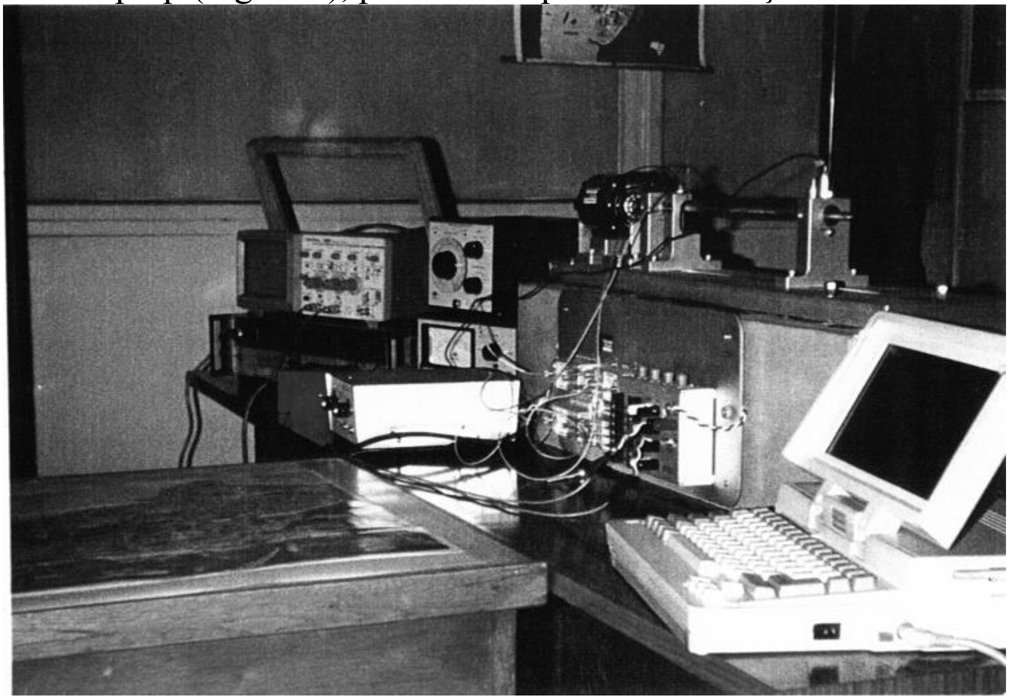


Fig.5.10

Semnalul înregistrat a fost apoi prelucrat folosind Toolbox-ul Signal Processing din MATLAB.

Arborele conic utilizat la efectuarea măsurătorilor, figurile 5.11.a,b, a fost confecţionat din oţel, în atelierul mecanic al Catedrei de Rezistenţa materialelor din Universitatea Politehnica Bucureşti.

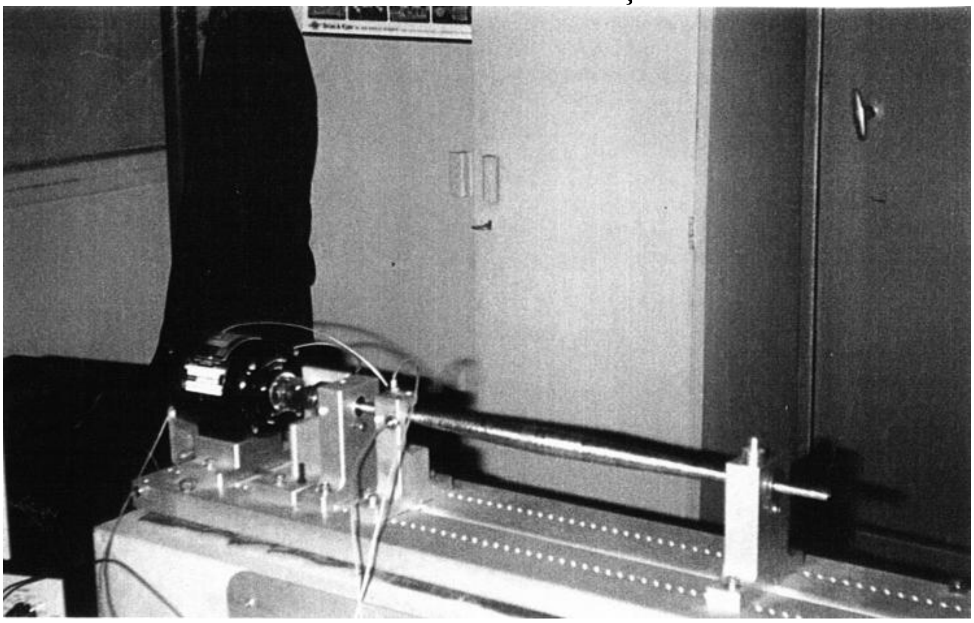


Fig.5.11.a

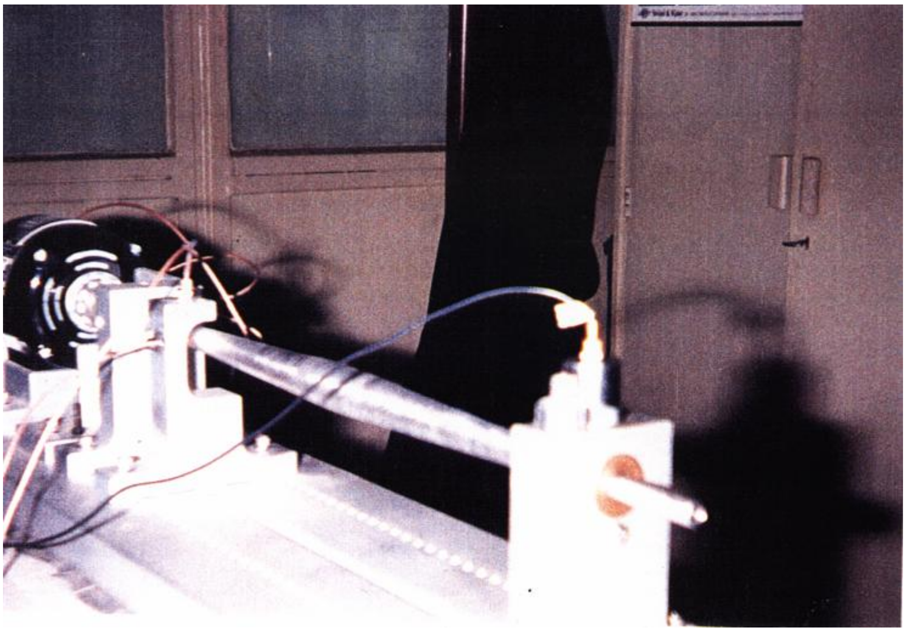


Fig.5.11.b

Acest arbore are lungimea totală de 450 mm, diametrul maxim de 21 mm, diametrul minim de 9 mm, iar porţiunile conice au o înclinare de 2º, figura 5.12.

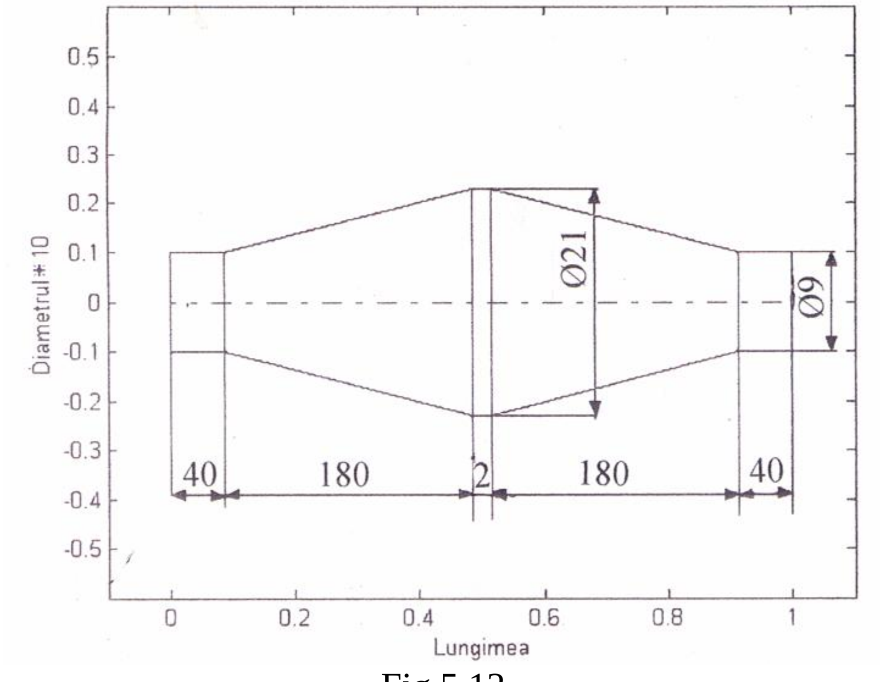


Fig.5.12

Utilizând programul DRACULA în MATLAB şi discretizând fiecare porţiune tronconică în câte 4 elemente finite conice, prima turaţie critică calculată a rezultat de 7725 rot/min, adică 128,75 Hz.

5.3. Interpretarea rezultatelor obţinute

Arborele cu porţiuni tronconice a fost montat pe standul Rotor Kit în lagăre de bronz grafitat (Fig.5.13). Folosind facilităţile oferite de către sistemul de comandă al motorului de antrenare al rotorului, turaţia acestuia a putut fi reglată şi menţinută constantă la valori discrete cuprinse în plaja 1200-12000 rot/min, cu un pas de 600 rot/min. Corespunzător fiecărei turaţii, s-au făcut înregistrări pe durata a trei secunde, cu o rată de eşantionare de o miime de secundă. Ulterior, datele achiziţionate au fost prelucrate utilizând tool-box-urile specifice (Signal Processing) din MATLAB, obţinându-se curbele de răspuns în frecvenţă.

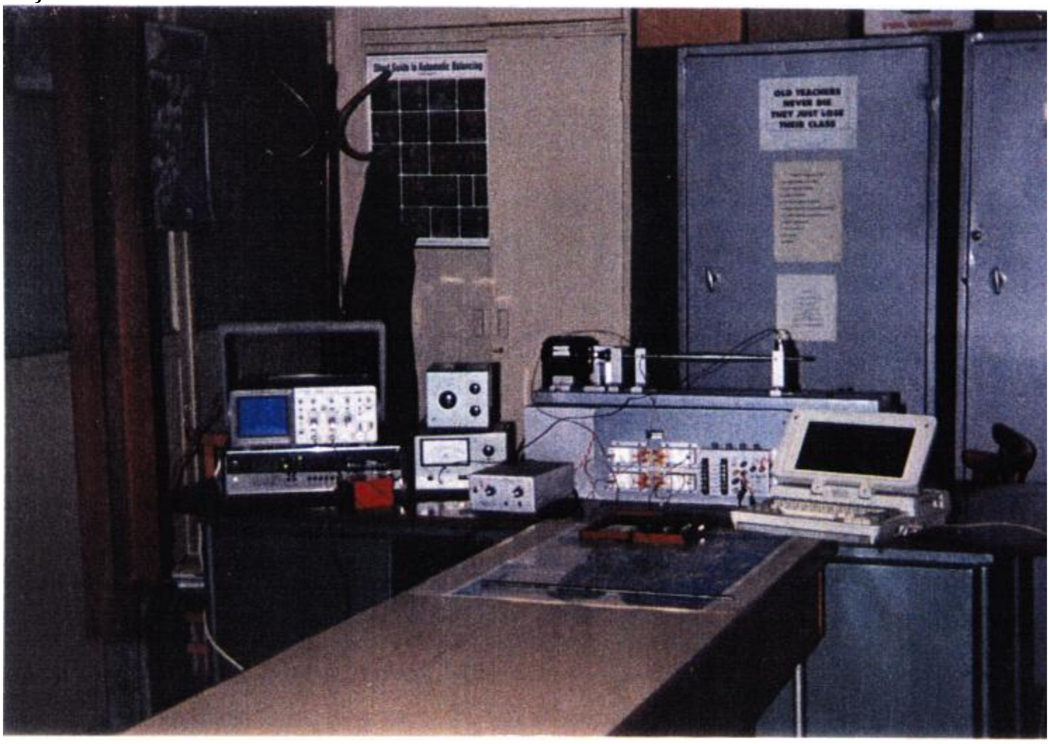


Fig.5.13

Este cunoscut faptul că un proces aleator poate fi descris fie în domeniul timp, prin valorile unei funcţii de timp **h(t)**, fie în domeniul frecvenţă, prin funcţia **H(f)**, ca funcţie de frecvenţa **f** , în care $-\infty < f < +\infty$. Transformata Fourier a uneia dintre funcţii o dă pe cea de-a doua, ele putând fi scrise sub forma:

$$\mathbf{H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t}\, dt} \tag{5.1}$$

$$\mathbf{h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi i f t}\, df} \tag{5.2}$$

În cazul de faţă, **h(t)** reprezintă variaţia deplasării în timp, măsurată pe lagărul rotorului şi înregistrată pe hard-disk-ul laptop-ului. O secvenţă a unei astfel de înregistrări este prezentată în figura 5.14 şi a fost făcută la turaţia de 1800 rot/min. Privind graficul din figura 5.14, se observă că în semnalul înregistrat predomină componenta primei armonici (cea corespunzătoare frecvenţei de rotaţie a rotorului), peste care se suprapune o componentă de înaltă frecvenţă, aceasta ieşind însă din domeniul frecvenţelor de interes şi corespunzând, probabil, semnalelor induse de periile colectorului motorului electric.

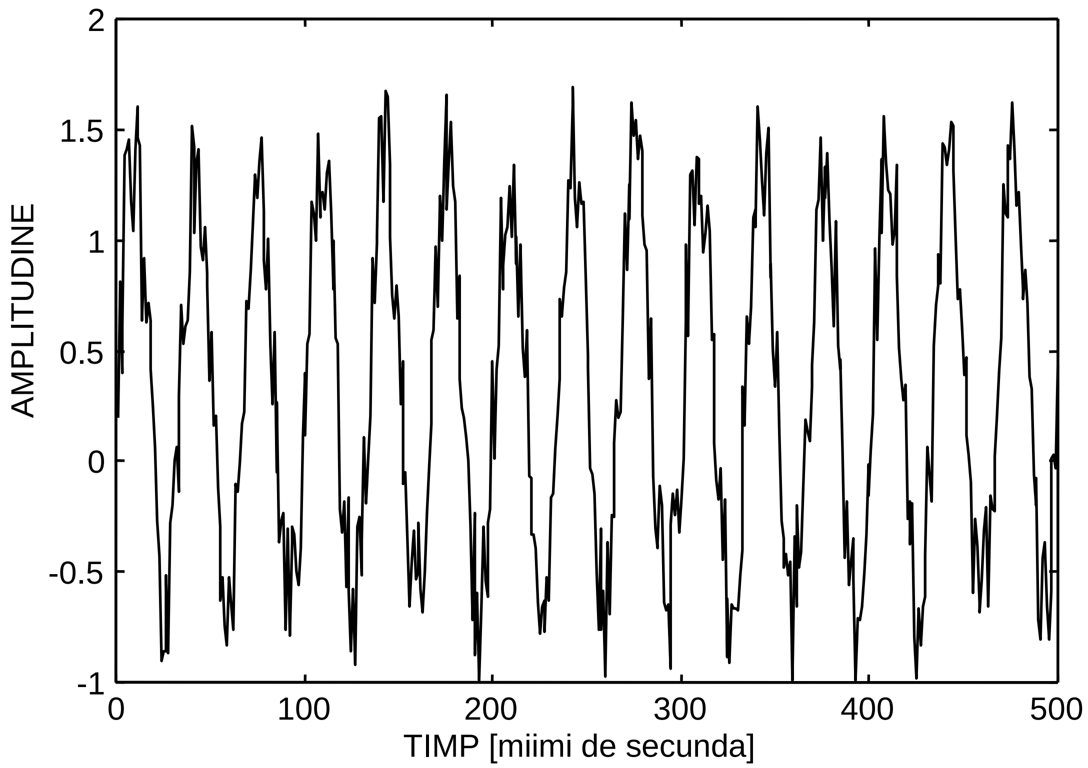


Fig.5.14

Utilizând facilităţile oferite de către programele MATLAB, fişierele cu datele înregistrate au fost prelucrate numeric cu ajutorul funcţiilor de forma FFT – conform relaţiei (5.2) – obţinându-se astfel răspunsul în frecvenţă, răspuns reprezentat grafic în figura 5.15. Aşa cum se observă din această figură, spectrul de răspuns în frecvenţă are o singură componentă, corespunzătoare frecvenţei de 30 Hz, cauzată de dezechilibrul masic al rotorului (rotorul tronconic a fost realizat în atelierul mecanic al catedrei de Rezistenţa

materialelor, după care a fost montat direct pe stand, fără a i se face o echilibrare).

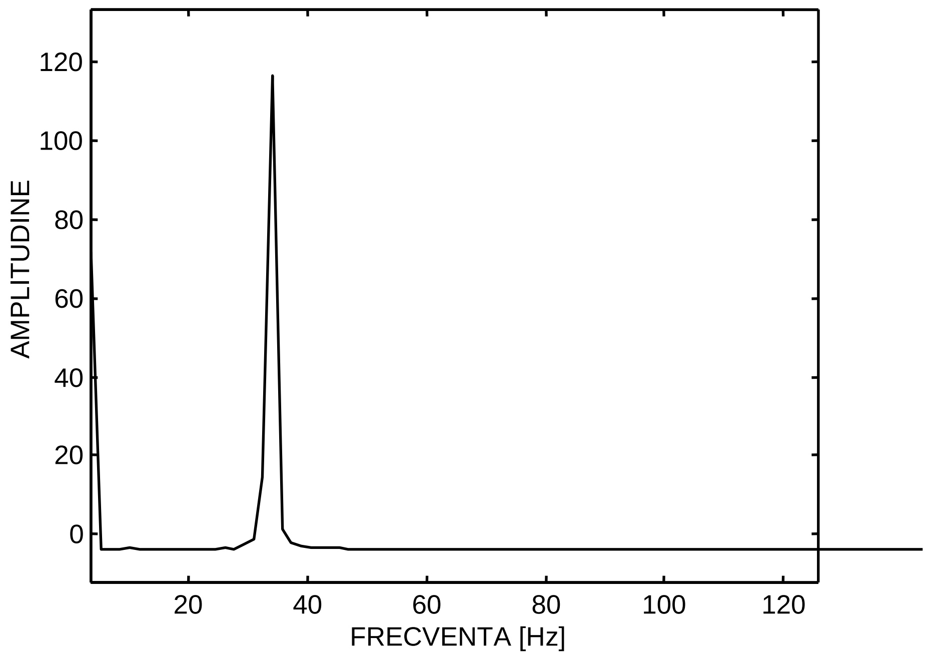


Fig.5.15

Valoarea amplitudinii nu a prezentat în cazul de faţă vreun interes, urmărindu-se doar determinarea turaţiei critice a rotorului şi compararea ei cu cea obţinută teoretic, prin simulare numerică. Ca urmare, nu s-a făcut o etalonare a aparatelor de măsură în scopul obţinerii unei valori exacte a amplitudinii răspunsului la dezechilibru masic, interesând doar modificări cantitative ale acesteia, respectiv la trecerea de la o turaţie la alta a rotorului. Obţinerea unei valori maxime a amplitudinii măsurate va indica existenţa unei turaţii critice, aceasta fiind o metodă relativ simplă de determinare a turaţiilor critice.

În cazul de faţă, prin suprapunerea curbelor de răspuns în frecvenţă, curbe obţinute prin prelucrarea datelor experimentale înregistrate, se poate vizualiza cu uşurinţă valoarea frecvenţei în dreptul căreia apare rezonanţa, deci valoarea acelei frecvenţe la care viteza de rotaţie a arborelui devine egală cu pulsaţia proprie a sistemului elastic rotor-lagăre (Fig.5.16). Astfel, folosind funcţii de interpolare (MATLAB) corespunzătoare coordonatelor punctelor de maxim, puncte aflate pe curbele de răspuns în frecvenţă specifice fiecărei turaţii

la care s-au făcut înregistrări, s-a obţinut o singură valoare critică în domeniul frecvenţelor studiate, $\mathbf{f_{cr}}$ =126 Hz, care corespunde turaţiei critice $\mathbf{n_{cr}}$ =7560 rot/min (Fig.5.17).

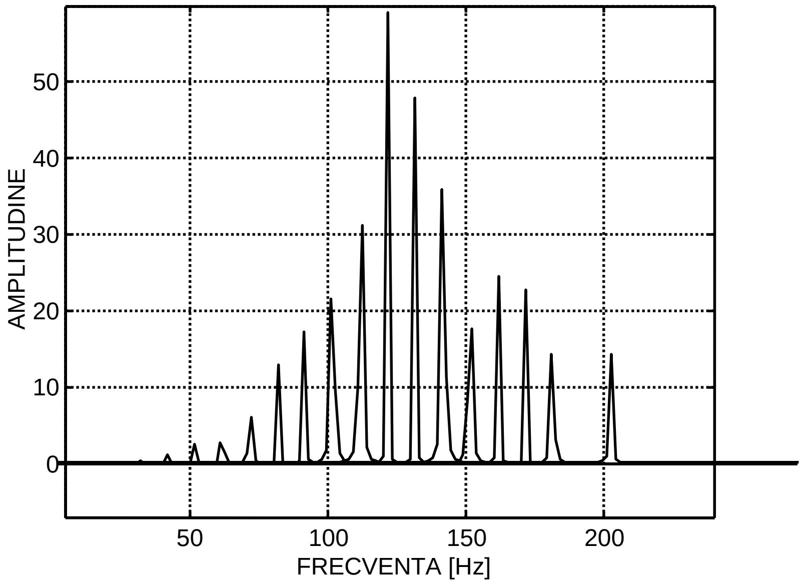


Fig.5.16

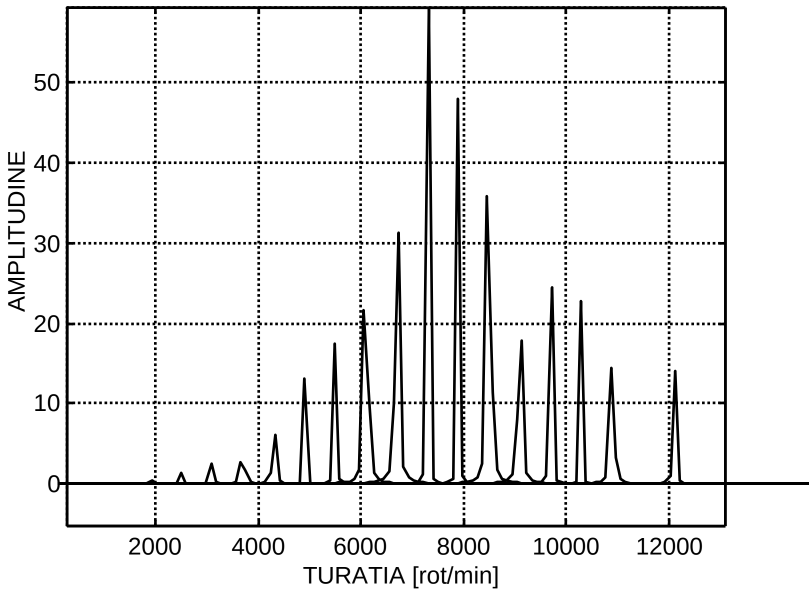


Fig.5.17

Comparând valoarea turaţiei critice obţinută experimental (7560 rot/min) cu cea obţinută prin simulare numerică şi folosirea elementului conic în

metoda elementelor finite 7725 rot/min, a rezultat o diferenţă $\mathbf{\Delta n_{cr}}$ = 165 rot/min, care corespunde unei erori de 2,18% raportată la valoarea măsurată experimental.

O explicaţie, a faptului că turaţia critică obţinută prin simulare numerică are o valoare mai mare decât cea obţinută experimental, poate fi dată dacă se ia în considerare rigiditatea relativ mai mare a modelului cu elemente finite al sistemului, faţă de rigiditatea existentă în cazul real. Rezultate numerice apropiate de cele experimentale pot fi obţinute printr-o discretizare mai fină a rotorului, deci prin mărirea numărului de elemente finite, ceea ce va duce la mărirea elasticităţii sistemului rotor-lagăre. Este de altfel cunoscut faptul că cu cât se doresc rezultate ale modurilor proprii superioare, obţinute prin aplicarea metodei elementelor finite, mai apropiate de cele reale, cu atât mai fină trebuie efectuată discretizarea sistemului.

De multe ori, reprezentările grafice ale curbelor de răspuns în frecvenţă se fac folosind scări logaritmice în scopul unei vizualizări optime a răspunsului şi în domeniul frecvenţelor joase şi înalte. Curbele de răspuns în frecvenţă din figurile 5.16 şi 5.17 au fost trasate folosind şi astfel de scări şi sunt prezentate în figurile 5.18 şi respectiv 5.19. Rezultă clar şi din aceste grafice că în plaja de turaţii 1800-12000 rot/min apare numai o singură turaţie critică, în dreptul valorii de 7560 rot/min. Cea de a doua turaţie critică nu a mai putut fi obţinută experimental deoarece valoarea ei depăşea cu mult turaţia maximă, capabilă, a motorului de antrenare a rotorului (≈ 12230 rot/min).

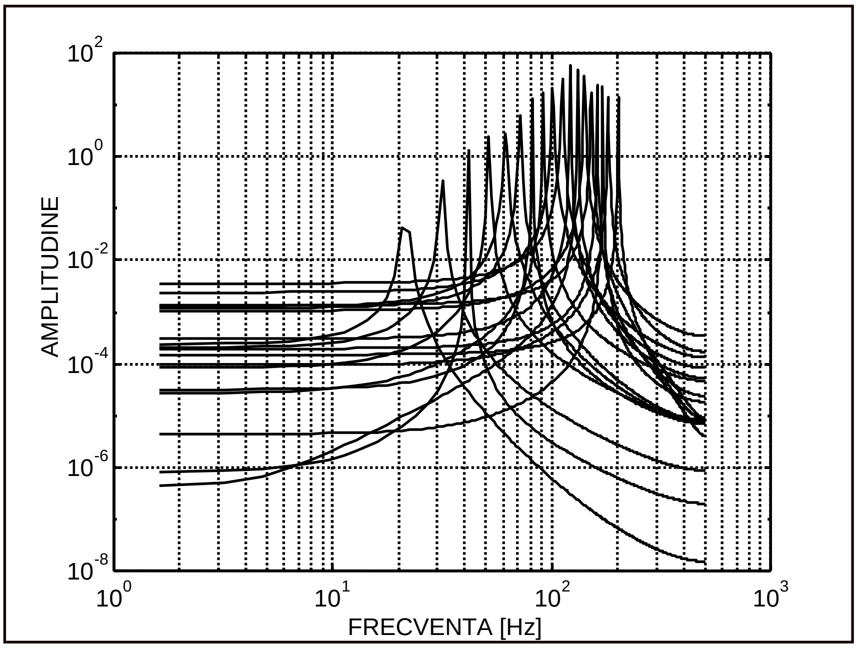


Fig.5.18

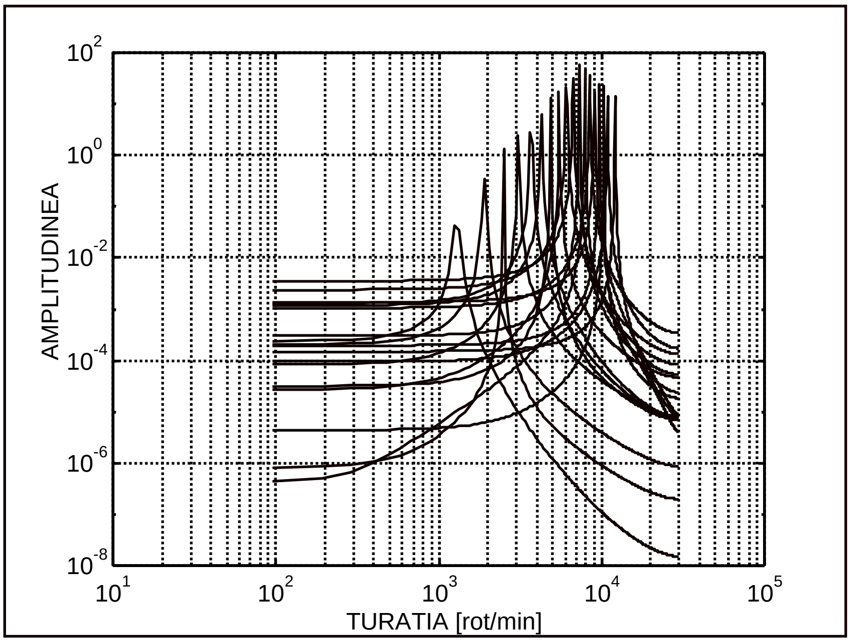


Fig.5.19

Faptul că apar intersecţii ale curbelor de răspuns în frecvenţă, în domeniul frecvenţelor relativ înalte (în zonele descendente – cu pantă negativă – ale acestor curbe), poate fi explicat prin neliniarităţile existente în sistem şi cauzate în principal de prezenţa inelului de cauciuc aflat între bucşa de cupru grafitat al lagărului şi corpul acestuia (a se vedea figura 5.3).

Un alt mod de vizualizare al rezultatelor este cel în cascadă (*waterfall*) şi este prezentat în figura 5.20, în care curbele de răspuns în frecvenţă, corespunzătoare turaţiilor rotorului la care s-au făcut înregistrările, sunt reprezentate succesiv, una în spatele celeilalte. Pe abscisă sunt trecute frecvenţele care caracterizează răspunsul sistemului, iar pe ordonată turaţiile la care s-a făcut înregistrarea datelor experimentale. Dacă pe ambele axe s-ar fi ales aceeaşi mărime fizică (fie numai frecvenţa exprimată în Hz, fie numai turaţia – în rot/min), maximele de pe curbele de răspuns s-ar fi aliniat în lungul primei bisectoare din plan şi ar fi demonstrat astfel clar că ele sunt cauzate de existenţa dezechilibrului masic al rotorului.

În concluzie, efectuarea de măsurări numai la o singură turaţie, sau la un număr relativ mic de turaţii ale rotorului, nu oferă informaţii referitoare la turaţiile critice ale sistemului. Pentru a obţine turaţiile critice sunt necesare un număr relativ mare de înregistrări, la diverse turaţii ale rotorului pentru a putea fi posibilă găsirea valorii maxime extreme a răspunsului, aceasta corespunzând turaţiei critice.

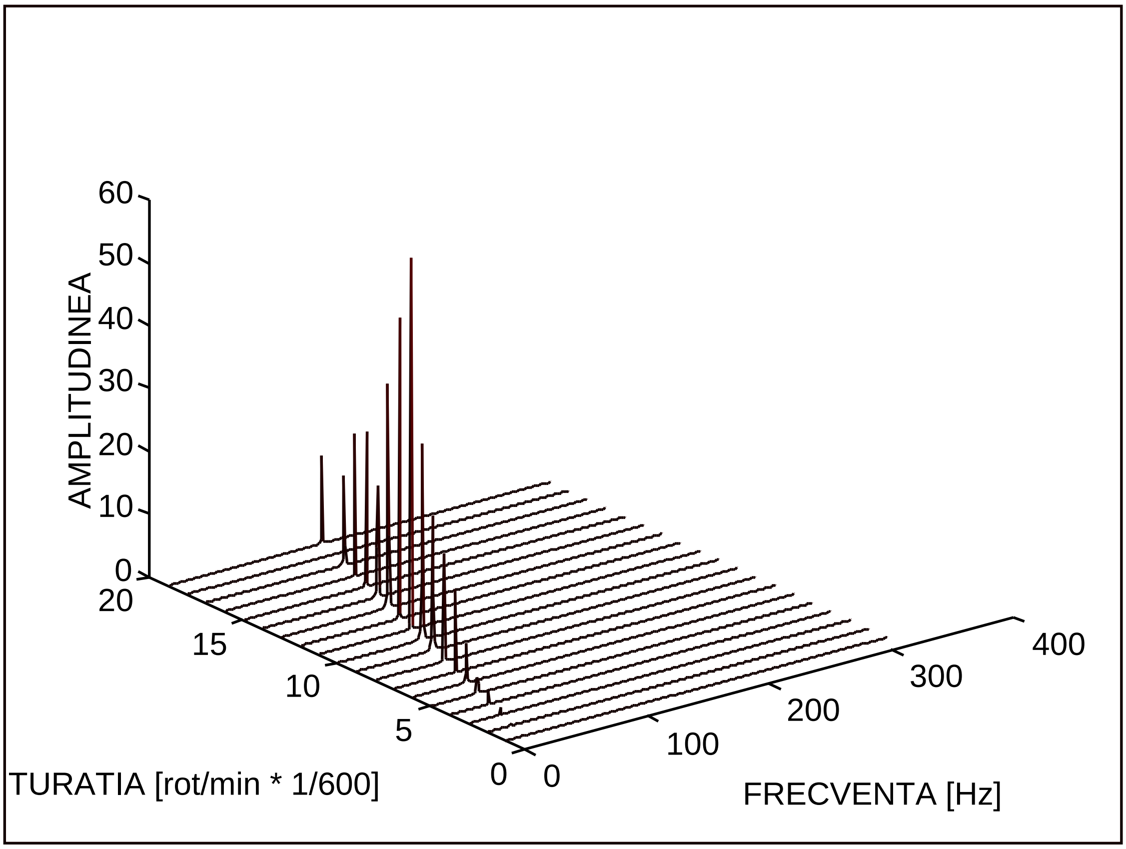


Fig.5.20

Eroarea relativ mică între valorile obţinute prin simulare numerică şi cele experimentale oferă siguranţă în folosirea elementului conic implementat în programul de elemente finite, certificând astfel robusteţea acestuia.

6. Concluzii

6.1. Modelarea dinamică a sistemelor rotor-lagăre

Pentru modelarea dinamică a sistemelor rotor-lagăre, în lucrarea de faţă, din cele două metode posibile: metoda matricelor de transfer şi metoda elementelor finite, a fost abordată cea de a doua, datorită posibilităţilor mai largi de modelare a tuturor părţilor componente a maşinilor cu rotor şi a diverselor efecte ce apar în funcţionarea acestora.

Obiectul tezei, însă, l-a constituit numai modelarea sistemelor rotor-lagăre, adică modelarea arborelui, a discurilor şi a lagărelor, nu şi celelalte efecte privind interacţiunea rotorului cu etanşările, piedestalurile şi fundaţia maşinii.

Din marea diversitate de elemente finite existente cu aplicabilitate în dinamica rotorilor, pentru modelarea arborilor s-a optat pentru elementul finit de tip bară cu două noduri la capete. Au fost stabilite matricea de rigiditate, matricea de inerţie coerentă, matricea giroscopică coerentă şi vectorul forţelor de dezechilibru

Discurile rigide s-au modelat declarând existenţa şi caracteristicile acestora în nodurile elementelor. Au fost stabilite matricea de inerţie, matricea giroscopică şi vectorul forţelor de dezechilibru pentru discurile rigide axial simetrice.

Lagărele au fost modelate, de asemenea, declarând în nodurile elementelor existenţa şi caracteristicile lor mecanice şi definind matricele celor opt coeficienţi dinamici elastici şi de amortizare.

Problema modelării arborelui a fost mai pe larg dezbătută, fiind de altfel şi cea mai importantă.

Ca urmare, la programul de Dinamica rotorilor în uz la Catedra de Rezistenţa materialelor din Universitatea Politehnica Bucureşti, care modela arborele prin elemente finite de bară de tip Bernoulli-Euler, s-a adăugat posibilitatea de modelare a arborilor cu elemente finite de bară de tip Timoshenko ce ţin cont atât de încovoiere, ca şi elementul de bară de tip Bernoulli-Euler, cât şi de deformaţiile datorită forfecării şi de inerţia la rotaţie.

S-a implementat, în mediul MATLAB, un element de bară tronconic de tip Timoshenko, pentru a înlocui procedeul de modelare al arborilor

având porţiuni tronconice prin elemente cilindrice în trepte, cu modelarea directă prin elemente de bară tronconice.

În literatura de specialitate există o multitudine de elemente finite pentru modelarea arborilor conici, dar experienţa căpătată în cursul studiilor efectuate, demonstrează că cele mai performante sunt: **1)** elementul conic descris în lucrarea [58], preluat de autoare şi numit CON 8, care este un element finit de bară axial simetric (având secţiunea transversală circulară sau inelară), de tip Timoshenko, cu două noduri la capete, cu câte patru grade de libertate pe nod, adică deplasarea laterală şi rotirea secţiunii transversale, în câte două plane perpendiculare între ele şi **2)** elementul conic descris în lucrarea [70] şi numit de autoare CON 12. Şi acest element se bazează pe elementul de bară de tip Timoshenko având două noduri la capete, secţiunea transversală circulară sau inelară, dar el are câte şase grade de libertate pe nod: deplasarea transversală, rotirea axei neutre şi unghiul de forfecare, în câte două plane perpendiculare între ele.

Pentru fiecare din aceste două elemente finite conice s-au scris, în mediul MATLAB, subrutinele pentru calculul matricei de masă coerente, matricei de rigiditate şi matricei giroscopice coerente în vederea completării programului existent.

Matricele elementului CON 8 au dimensiuni 8x8. Matricele elementului CON 12 au dimensiuni 12x12, ceea ce necesită o procedură de condensare statică pentru micşorarea ordinului matricelor la dimensiuni 8x8, cu scopul de a fi compatibile cu restul programului.

Cu programul astfel realizat s-au făcut o serie de simulări numerice din care au rezultat câteva particularităţi:

1. Existenţa aşa numitului „spectru de frecvenţe de ordinul doi” al rotorilor modelaţi cu elemente de bară de tip Timoshenko. Spectrul de frecvenţe de ordinul doi apare atunci când rotirea secţiunii transversale datorită forfecării este de sens contrar rotirii produse de încovoiere. Când aceste rotiri au acelaşi sens există un mod de precesie clasic.

2. Efectul de rigidizare introdus de conicizarea unui arbore. S-a studiat efectul variaţiei conicităţii unui arbore tubular de grosime constantă, realizat dinvolum de material constant, asupra rigidităţii acestuia. S-a observat că, rigiditatea arborelui creşte odată cu creşterea conicităţii, la un volum constant de material.

3. Existenţa unor moduri de precesie mixtă, în care unele puncte ale rotorului au mişcare de precesie directă, iar alte puncte ale aceluiaşi rotor

au precesie inversă, fără a apărea torsiunea arborelui. Prin mod mixt de precesie se înţelege un mod compus rezultat din combinarea a două moduri diferita care au aceeaşi frecvenţă. Se arată că sensul mişcării de precesie nu este o proprietate globală ci una locală, deşi există moduri de precesie exclusiv directă sau inversă. Aceste efecte pot trece neobservate dacă numărul punctelor în care se calculează sensul mişcării de precesie este insuficient. Modurile mixte pot apare la sistemele cu lagăre anizotrope şi nesimetrice în lungul arborelui. Chiar când rotorul este axial simetric, ortotropia statorului face ca prin cuplarea unor moduri cu forme proprii diferite să rezulte moduri cu precesie mixtă. În cadrul studiului efectuat s-au rezolvat dificultăţile ce apar la trasarea automată a diagramei Campbell, utilizată la determinarea turaţiilor critice, reliefând faptul că pentru anumite tipuri de rotori apare alura convergent-divergentă a ramurilor diagramei (veering), despre care s-a vorbit în paragraful 4.3. Utilizând cele două elemente finite conice CON 8 şi CON 12, s-a realizat un studiu comparativ pornind de la modelarea unei porţiuni tronconice prin elemente conice sau cilindrice în trepte, comparând apoi utilizarea în calcule a elementului de bară tip Bernoulli-Euler sau tip Timoshenko. S-a ajuns la următoarele concluzii: **a)** Modelarea porţiunii tronconice a unui rotor cu elemente finite conice duce la obţinerea de valori mai mari ale pulsaţiilor proprii, în fiecare caz studiat, acestea convergând monoton de la valori superioare către valorile „exacte” (considerate a fi foarte apropiate de cele obţinute după discretizarea rotorului în 32 de elemente); **b)** Rezultatele obţinute în urma discretizării rotorului în elemente cilindrice în trepte sunt convergente, dar nu numai dinspre valori superioare, ci chiar şi dinspre valori inferioare către valori apropiate de cele „exacte”. Convergenţa nemonotonă a acestui tip de modelare este mai evidentă pentru elementele Bernoulli-Euler; **c)** Elementul conic CON 12, cu reducerea Guyan a gradelor de libertate pentru deformaţiile de forfecare, conduce la o precizie mai mare a valorilor primelor două moduri de precesie decât elementul conic CON 8. Elementul CON 8 conduce la o precizie mai mare în calcul pentru valorile pulsaţiilor proprii corespunzătoare modurilor superioare de precesie; **d)** Modelarea secţiunii tronconice printr-un singur element conic produce erori mari, astfel încât nu este recomandată; **e)** Dacă inerţia la rotaţie şi forfecarea transversală se neglijează, atunci elementele CON 12 şi CON 8 conduc, în esenţă, la aceleaşi rezultate; **f)** Utilizarea elementelor finite conice pentru porţiunile de arbore tronconic conduce la creşterea preciziei calculelor şi la simplificarea procedurii de modelare. S-a măsurat experimental prima turaţie critică a unui rotor cu porţiuni tronconice, după efectuarea

calculului acesteia cu programul DRACULA în MATLAB în vederea validării programului. Totuşi turaţia critică obţinută prin simulare numerică, la o discretizare a unei porţiuni tronconice în patru elemente conice, a avut o valoare mai mare decât cea obţinută experimental, eroarea fiind de 2.18%, explicaţia fiind rigiditatea relativ mai mare a modelului cu elemente finite, faţă de rigiditatea existentă în cazul real, dar rezultatele numerice sunt cu atât mai apropiate de cele experimentale, cu cât discretizarea este mai fină.

6.2. Contribuţii originale

Lucrarea de faţă a apărut ca o necesitate a rezolvării unor probleme de modelare dinamică a sistemelor rotor-lagăre în cadrul preocupărilor Catedrei de Rezistenţa materialelor din Universitatea Politehnica Bucureşti.

Contribuţiile principale ale autoarei sunt următoarele:

1. Prezintă o sinteză a modelării barelor şi sistemelor de bare cu elemente finite de tip Timoshenko în analiza dinamică.

2. Prezintă o clasificare şi o caracterizare detaliată a elementelor finite tronconice.

3. Realizează şase subrutine de calcul în mediul MATLAB pentru modelarea elementelor conice de tip Timoshenko CON 8 şi CON 12, primul fiind un element de bară conic având două noduri la capete şi patru grade de libertate pe nod, cu matrice de ordin 8x8, iar al doilea un element cu două noduri la capete şi şase grade de libertate pe nod, care necesită şi o condensare statică pentru micşorarea ordinului matricelor de la 12x12 la 8x8.

4. Pune în evidenţă spectrul de frecvenţe de ordinul doi al arborilor modelaţi cu elemente de bară de tip Timoshenko.

5. Studiază modurile mixte de precesie, în care unele puncte ale unui arbore au precesie directă, iar altele, simultan, au precesie inversă şi apoi face analiza diagramelor Campbell trasate pentru rotori cu precesie mixtă şi modelaţi prin elemente de tip Timoshenko.

6. Realizează un studiu comparativ între valorile măsurate experimental şi apoi calculate numeric, pentru o turaţie critică a unui arbore cu porţiuni tronconice.

7. Completează programul DRACULA (**D**inamica **R**otorilor **A**sistată de **C**alc**ULA**tor), sub forma unui Toolbox în mediu MATLAB, pentru a permite calculul răspunsului dinamic al rotorilor modelând arborii cu elemente de bară Timoshenko tronconice sau chiar cilindrice, acestea din urmă fiind de fapt un caz particular al celor conice.

8. Prezintă o amplă bibliografie (peste 200 de titluri) referitoare la domeniul studiat.

Pe parcursul dezvoltării tezei, autoarea a participat la contracte de cercetare [211, 212, 213] cu tematică legată de preocupările din această lucrare, în care s-au publicat o serie de rezultate obţinute folosind programul de calcul D elaborat de autoare.

Rezultate parţiale legate de tema abordată în teza de doctorat, au fost publicate în [179, 180, 181, 182, 183, 184, 186, 210].

Studiile şi cercetările din ultimii ani au permis autoarei să-şi formeze o imagine de ansamblu asupra problematicii modelării dinamice a sistemelor rotor-lagăre şi au deschis perspectiva unor cercetări viitoare:

1. Modelarea arborilor prin elemente finite diferite de cele de tip bară (modele de tip C^0).

2. Continuarea studiului modurilor mixte de precesie, având în vedere interesul manifestat pe plan internaţional faţă de această problemă [217, 218].

3. Studiul influenţei flexibilităţii discului asupra comportării dinamice a maşinilor cu rotor.

4. Studiul rotorilor din materiale compozite.

Anexa 1

Calculul funcţiilor de formă pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler

Calculul funcţiilor de formă în planul x-y

Funcţiile de formă au următoarele proprietăţi importante:
1. Suma funcţiilor de formă are valoarea egală cu 1 în orice nod;
2. Corespunzător coordonatei n, funcţia de formă N_n=1, iar celelalte funcţii de formă au valori nule.

Pentru $\mathbf{v_i = v(x=0) = v(\xi=0) \rightarrow N_1(\xi)=1; \tilde{N}_1(\xi)=1;}$
Pentru $\mathbf{\psi_i = \psi(x=0) = \psi(\xi=0) \rightarrow N_2(\xi)=1; \tilde{N}_2(\xi)=1;}$
Pentru $\mathbf{v_j = v(x=L) = v(\xi=1) \rightarrow N_3(\xi)=1; \tilde{N}_3(\xi)=1;}$
Pentru $\mathbf{\psi_j = \psi(x=L) = \psi(\xi=1) \rightarrow N_4(\xi)=1; \tilde{N}_4(\xi)=1.}$

Determinarea funcţiilor de formă $\mathbf{N_1(\xi)}$ şi $\mathbf{\tilde{N}_1(\xi)}$ în planul x-y

Pentru determinarea funcţiilor de formă se folosesc următoarele relaţii:

$$\begin{cases} \mathbf{v(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0} \\ \mathbf{\psi(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1} \end{cases}$$

De asemenea

$$\begin{cases} \mathbf{v(\xi) = N_1(\xi)v_i + N_2(\xi)\psi_i + N_3(\xi)v_j + N_4(\xi)\psi_j} \\ \mathbf{\psi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)v_i + \tilde{N}_2(\xi)\psi_i + \tilde{N}_3(\xi)v_j + \tilde{N}_4(\xi)\psi_j} \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{cases} v(0)=1 & \Rightarrow A_0 = 1 \\ \psi(0)=0 & \Rightarrow \frac{1}{L}A_1 = 0 \\ v(1)=0 & \Rightarrow A_3 + A_2 + A_1 + A_0 = 0 \\ \psi(1)=0 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3 + \frac{2}{L}A_2 + \frac{1}{L}A_1 = 0 \end{cases}$$

De unde $A_0 = 1, A_1 = 0,$

apoi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} A_2 + A_3 = -1 \\ 2A_2 + 3A_3 = 0 \end{cases},$$

iar soluţiile finale sunt:

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = -3 \\ A_3 = 2 \end{cases}.$$

Ca urmare

$$N_1(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0$$

Deci funcţia de formă pentru translaţii este:

$$\boxed{N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3}$$

Pe de altă parte

$$\tilde{N}_1(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1$$

Adică

$$\tilde{N}_1(\xi) = \frac{3}{L}2\xi^2 - \frac{2}{L}3\xi$$

Deci funcţia de formă pentru rotaţii este:

$$\boxed{\tilde{N}_1(\xi) = \frac{1}{L}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)}$$

Determinarea funcţiilor de formă $N_2(\xi)$ şi $\tilde{N}_2(\xi)$ în planul x-y

$$\begin{cases} v(0)=0 & \Rightarrow A_0=0 \\ \psi(0)=1 & \Rightarrow \frac{1}{L}A_1=1 \\ v(1)=0 & \Rightarrow A_3+A_2+A_1+A_0=0 \\ \psi(1)=0 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3+\frac{2}{L}A_2+\frac{1}{L}A_1=0 \end{cases}$$

De unde $A_0=0,\ A_1=-L,$
apoi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} A_2+\ \ A_3= & -L \\ 2A_2+\ 3A_3= & -L \end{cases},$$

iar soluţiile finale sunt:

$$\begin{cases} A_0= & 0 \\ A_1= & L \\ A_2= & -2L \\ A_3= & L \end{cases}.$$

Ca urmare

$$N_2(\xi)=A_3\xi^3+A_2\xi^2+A_1\xi+A_0$$

Deci

$$\boxed{N_2(\xi)=L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)}$$

Pe de altă parte

$$\tilde{N}_2(\xi)=\frac{3}{L}A_3\xi^2+\frac{2}{L}A_2\xi+\frac{1}{L}A_1$$

Adică

$$\tilde{N}_2(\xi)=\frac{3}{L}L\xi^2-\frac{2}{L}2L\xi+\frac{1}{L}L$$

Deci

$$\boxed{\tilde{N}_2(\xi)=3\xi^2-4\xi+1}$$

Determinarea funcţiilor de formă $N_3(\xi)$ şi $\tilde{N}_3(\xi)$ în planul x-y

$$\begin{cases} v(0)=0 & \Rightarrow A_0 = 0 \\ \psi(0)=0 & \Rightarrow \frac{1}{L}A_1 = 0 \\ v(1)=1 & \Rightarrow A_3 + A_2 + A_1 + A_0 = 1 \\ \psi(1)=0 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3 + \frac{2}{L}A_2 + \frac{1}{L}A_1 = 0 \end{cases}$$

De unde $A_0 = 0, A_1 = 0,$
apoi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} A_2 + A_3 = 1 \\ 2A_2 + 3A_3 = 0 \end{cases},$$

iar soluţiile finale sunt:

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 3 \\ A_3 = -2 \end{cases}.$$

Ca urmare

$$N_3(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0$$

Deci

$$\boxed{N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3}$$

Pe de altă parte

$$\tilde{N}_3(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1$$

Adică

$$\tilde{N}_3(\xi) = -\frac{3}{L}2\xi^2 + \frac{2}{L}3\xi$$

Deci

$$\boxed{\tilde{N}_3(\xi) = \frac{1}{L}\left(-6\xi^2 + 6\xi\right)}$$

Determinarea funcţiilor de formă $N_4(\xi)$ şi $\tilde{N}_4(\xi)$ în planul x-y

$$\begin{cases} v(0)=0 & \Rightarrow A_0 = 0 \\ \psi(0)=0 & \Rightarrow \frac{1}{L}A_1 = 0 \\ v(1)=0 & \Rightarrow A_3 + A_2 + A_1 + A_0 = 0 \\ \psi(1)=1 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3 + \frac{2}{L}A_2 + \frac{1}{L}A_1 = 1 \end{cases}$$

De unde $A_0 = 0, A_1 = 0,$
apoi se rezolvă sistemul:

$$\begin{cases} A_2 + A_3 = 0 \\ 2A_2 + 3A_3 = L \end{cases},$$

iar soluţiile finale sunt:

$$\begin{cases} A_0 = 0 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = L \\ A_3 = -L \end{cases}.$$

Ca urmare

$$N_4(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0$$

Deci

$$\boxed{N_4(\xi) = L\left(-\xi^2 + \xi^3\right)}$$

Pe de altă parte

$$\tilde{N}_4(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1$$

Adică

$$\tilde{N}_4(\xi) = \frac{3}{L}L\xi^2 - \frac{2}{L}L\xi$$

Deci

$$\boxed{\tilde{N}_4(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi}$$

Calculul funcţiilor de formă în planul x-z

Folosind proprietăţile funcţiilor de formă, se calculează expresiile acestora şi în planul x-z.

Determinarea funcţiilor de formă $N_1(\xi)$ şi $\tilde{N}_1(\xi)$ în planul x-z

Pentru determinarea funcţiilor de formă se folosesc următoarele relaţii:

$$\begin{cases} w(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0 \\ -\varphi(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1 \end{cases}$$

De asemenea

$$\begin{cases} w(\xi) = N_1(\xi)w_i - N_2(\xi)\varphi_i + N_3(\xi)w_j - N_4(\xi)\varphi_j \\ -\varphi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)w_i - \tilde{N}_2(\xi)\varphi_i + \tilde{N}_3(\xi)w_j - \tilde{N}_4(\xi)\varphi_j \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{cases} w(0) = 1 & \Rightarrow A_0 = 1 \\ -\varphi(0) = 0 & \Rightarrow \frac{1}{L}A_1 = 0 \\ w(1) = 0 & \Rightarrow A_3 + A_2 + A_1 + A_0 = 0 \\ -\varphi(1) = 0 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3 + \frac{2}{L}A_2 + \frac{1}{L}A_1 = 0 \end{cases}$$

Deci $A_0 = 1, A_1 = 0.$

Se formează acelaşi sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} A_2 + A_3 = -1 \\ 2A_2 + 3A_3 = 0 \end{cases},$$

pentru care se obţin soluţiile:

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = -3 \\ A_3 = 2 \end{cases}.$$

Ca urmare, funcţia de formă pentru translaţii este:

$$\mathbf{N_1(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0}$$

Deci

$$\boxed{\mathbf{N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3}}$$

Pe de altă parte, funcţia de formă pentru rotaţii este:

$$\mathbf{-\tilde{N}_1(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}A_1}$$

Adică

$$\mathbf{-\tilde{N}_1(\xi) = \frac{3}{L}\cdot 2\xi^2 - \frac{2}{L}\cdot 3\xi}$$

Deci

$$\boxed{\mathbf{\tilde{N}_1(\xi) = -\frac{1}{L}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)}}$$

Calculul pentru celelalte seturi de funcţii de formă se face asemănător. Se observă că funcţiile de formă corespunzătoare planului x-z sunt identice cu cele din planul x-y, doar că funcţiile de formă pentru rotirea φ, notate în final cu indicele φ, au semnul „minus” spre deosebire de cele pentru rotirea ψ :

Funcţii de formă pentru deplasări, valabile atât în planul x-y cât şi în planul x-z:

$$\begin{cases} \mathbf{N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3} \\ \mathbf{N_2(\xi) = L\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right)} \\ \mathbf{N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3} \\ \mathbf{N_4(\xi) = L\left(-\xi^2 + \xi^3\right)} \end{cases}$$

Funcţii de formă pentru rotiri în planul x-z.

$$\begin{cases} \tilde{N}_{1\varphi}(\xi) = -\left[\frac{1}{L}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)\right] = -\tilde{N}_1(\xi), \\ \tilde{N}_{2\varphi}(\xi) = -\left[3\xi^2 - 4\xi + 1\right] = -\tilde{N}_2(\xi), \\ \tilde{N}_{3\varphi}(\xi) = -\left[\frac{1}{L}\left(-6\xi^2 + 6\xi\right)\right] = -\tilde{N}_3(\xi), \\ \tilde{N}_{4\varphi}(\xi) = -\left[3\xi^2 - 2\xi\right] = -\tilde{N}_4(\xi). \end{cases}$$

Deci

$$\lfloor \tilde{N}_{\varphi} \rfloor = -\lfloor \tilde{N} \rfloor$$

Anexa 2

Calculul funcţiilor de formă pentru elementul de arbore Timoshenko

Calculul funcţiilor de formă în planul x-y

Funcţiile de formă au următoarele proprietăţi importante:

1. Suma funcţiilor de formă are valoarea egală cu 1 în orice nod;
2. Corespunzător coordonatei n, funcţia de formă N_n=1, iar celelalte funcţii de formă au valori nule.

Pentru $\mathbf{v_i = v(x=0) = v(\xi=0) \rightarrow N_1(\xi)=1; \tilde{N}_1(\xi)=1;}$
Pentru $\mathbf{\psi_i = \psi(x=0) = \psi(\xi=0) \rightarrow N_2(\xi)=1; \tilde{N}_2(\xi)=1;}$
Pentru $\mathbf{v_j = v(x=L) = v(\xi=1) \rightarrow N_3(\xi)=1; \tilde{N}_3(\xi)=1;}$
Pentru $\mathbf{\psi_j = \psi(x=L) = \psi(\xi=1) \rightarrow N_4(\xi)=1; \tilde{N}_4(\xi)=1.}$

Determinarea funcţiilor de formă $\mathbf{N_1(\xi)}$ şi $\mathbf{\tilde{N}_1(\xi)}$ în planul x-y

Pentru determinarea funcţiilor de formă se folosesc următoarele relaţii:

$$\begin{cases} \mathbf{v(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0} \\ \mathbf{\psi(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right)} \end{cases}$$

De asemenea

$$\begin{cases} \mathbf{v(\xi) = N_1(\xi)v_i + N_2(\xi)\psi_i + N_3(\xi)v_j + N_4(\xi)\psi_j} \\ \mathbf{\psi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)v_i + \tilde{N}_2(\xi)\psi_i + \tilde{N}_3(\xi)v_j + \tilde{N}_4(\xi)\psi_j} \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{cases} v(0)=1 & \Rightarrow A_0=1 \\ \psi(0)=0 & \Rightarrow \dfrac{1}{L}\left(A_1+\dfrac{K}{2}A_3\right)=0 \\ v(1)=0 & \Rightarrow A_3+A_2+A_1+A_0=0 \\ \psi(1)=0 & \Rightarrow \dfrac{3}{L}A_3+\dfrac{2}{L}A_2+\dfrac{1}{L}\left(A_1+\dfrac{K}{2}A_3\right)=0 \end{cases}$$

Se rezolvă sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} 2A_1 + & & KA_3 & = & 0 \\ A_1 + & A_2 + & A_3 & = & -1 \\ & 2A_2 + & 3A_3 & = & 0 \end{cases} \tag{A2.1}$$

pentru care

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & K \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2(1+K); \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & K \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -2K;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & K \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Deci

$$\begin{cases} A_0 = & 1 \\ A_1 = & \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = & -\dfrac{K}{1+K} \\ A_2 = & \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = & -\dfrac{3}{1+K} \\ A_3 = & \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = & \dfrac{2}{1+K} \end{cases}$$

Ca urmare

$$\mathbf{N_1(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0}$$

Adică

$$\mathbf{N_1(\xi) = \frac{2}{1+K}\xi^3 - \frac{3}{1+K}\xi^2 - \frac{K}{1+K}\xi + 1}$$

Deci

$$\boxed{\mathbf{N_1(\xi) = \frac{1}{1+K}\left[1 + 2\xi^3 - 3\xi^2 + K(1-\xi)\right]}}$$

Pe de altă parte

$$\mathbf{\tilde{N}_1(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right)}$$

Adică

$$\mathbf{\tilde{N}_1(\xi) = \frac{3}{L}\cdot\frac{2}{1+K}\xi^2 - \frac{2}{L}\cdot\frac{3}{1+K}\xi + \frac{1}{L}\left(-\frac{K}{1+K} + \frac{K}{2}\cdot\frac{2}{1+K}\right)}$$

Deci

$$\boxed{\mathbf{\tilde{N}_1(\xi) = \frac{1}{1+K}\left[\frac{1}{L}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)\right]}}$$

Determinarea funcţiilor de formă $N_2(\xi)$ şi $\tilde{N}_2(\xi)$ în planul x-y

$$\begin{cases} \mathbf{v(0) = 0} & \mathbf{\Rightarrow A_0 = 0} \\ \mathbf{\psi(0) = 1} & \mathbf{\Rightarrow \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right) = 1} \\ \mathbf{v(1) = 0} & \mathbf{\Rightarrow A_3 + A_2 + A_1 + A_0 = 0} \\ \mathbf{\psi(1) = 0} & \mathbf{\Rightarrow \frac{3}{L}A_3 + \frac{2}{L}A_2 + \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right) = 0} \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii care se formează este următorul:

$$\begin{cases} 2A_1 + & & KA_3 & = & 2L \\ A_1 + & A_2 + & A_3 & = & 0 \\ & 2A_2 + & 3A_3 & = & -L \end{cases}$$

Pentru acest sistem, determinantul coeficienţilor $\Delta = 2(1+K)$ este acelaşi ca pentru sistemul (A2.1), dar ceilalţi determinanţi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sunt diferiţi:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2L & 0 & K \\ 0 & 1 & 1 \\ -L & 2 & 3 \end{vmatrix} = L(2+K); \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2L & K \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -L & 3 \end{vmatrix} = -L(4+K);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2L \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -L \end{vmatrix} = 2L.$$

$$\begin{cases} A_0 = & 0 & \\ A_1 = & \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = & \dfrac{L(2+K)}{2(1+K)} \\ A_2 = & \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = & -\dfrac{L(4+K)}{2(1+K)} \\ A_3 = & \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = & \dfrac{L}{1+K} \end{cases}$$

Ca urmare

$$N_2(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0$$

Adică

$$N_2(\xi) = \frac{L}{1+K}\xi^3 - \frac{L(4+K)}{2(1+K)}\xi^2 + \frac{L(2+K)}{2(1+K)}\xi + 0$$

Deci

$$\boxed{N_2(\xi) = \frac{1}{1+K}\left[L\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) + K\frac{L}{2}\left(\xi - \xi^2\right)\right]}$$

Pe de altă parte

$$\tilde{N}_2(\xi)=\frac{3}{L}A_3\xi^2+\frac{2}{L}A_2\xi+\frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)$$

Adică

$$\tilde{N}_2(\xi)=\frac{3}{L}\cdot\frac{L}{1+K}\xi^2-\frac{2}{L}\cdot\frac{L(4+K)}{2(1+K)}\xi+\frac{1}{L}\left(\frac{L(2+K)}{2(1+K)}+\frac{K}{2}\cdot\frac{L}{1+K}\right)$$

Deci

$$\boxed{\tilde{N}_2(\xi)=\frac{1}{1+K}\left[3\xi^2-4\xi+1+K(1-\xi)\right]}$$

Determinarea funcţiilor de formă $N_3(\xi)$ şi $\tilde{N}_3(\xi)$ în planul x-y

$$\begin{cases} v(0)=0 & \Rightarrow A_0=0 \\ \psi(0)=0 & \Rightarrow \frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)=0 \\ v(1)=1 & \Rightarrow A_3+A_2+A_1+A_0=1 \\ \psi(1)=0 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3+\frac{2}{L}A_2+\frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)=0 \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii care se formează este următorul:

$$\begin{cases} 2A_1+ & & KA_3 & = & 0 \\ A_1+ & A_2+ & A_3 & = & 1 \\ & 2A_2+ & 3A_3 & = & 0 \end{cases}$$

Pentru acest sistem, determinantul coeficienţilor $\Delta=2(1+K)$ este acelaşi ca pentru sistemul (A2.1), dar ceilalţi determinanţi $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ sunt diferiţi:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&0&K\\1&1&1\\0&2&3\end{vmatrix}=2K; \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&0&K\\1&1&1\\0&0&3\end{vmatrix}=6;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4.$$

$$\begin{cases} A_0 = & 0 \\ A_1 = & \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{K}{1+K} \\ A_2 = & \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{3}{1+K} \\ A_3 = & \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -\dfrac{2}{1+K} \end{cases}$$

Ca urmare

$$N_3(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0$$

Adică

$$N_3(\xi) = -\frac{2}{1+K}\xi^3 + \frac{3}{1+K}\xi^2 + \frac{K}{1+K}\xi + 0$$

Deci

$$\boxed{N_3(\xi) = \frac{1}{1+K}\left[3\xi^2 - 2\xi^3 + K\xi\right]}$$

Pe de altă parte

$$\tilde{N}_3(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right)$$

Adică

$$\tilde{N}_3(\xi) = -\frac{3}{L}\cdot\frac{2}{1+K}\xi^2 + \frac{2}{L}\cdot\frac{3}{1+K}\xi + \frac{1}{L}\left(\frac{K}{1+K} - \frac{K}{2}\cdot\frac{2}{1+K}\right)$$

Deci

$$\boxed{\tilde{N}_{3(\xi)} = \frac{1}{1+K}\left[\frac{1}{L}\left(-6\xi^2 + 6\xi\right)\right]}$$

Determinarea funcţiilor de formă $N_4(\xi)$ şi $\tilde{N}_4(\xi)$ în planul x-y

$$\begin{cases} v(0)=0 & \Rightarrow A_0 = 0 \\ \psi(0)=0 & \Rightarrow \frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)=0 \\ v(1)=0 & \Rightarrow A_3+A_2+A_1+A_0=0 \\ \psi(1)=1 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3+\frac{2}{L}A_2+\frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)=1 \end{cases}$$

Sistemul de ecuaţii care se formează este următorul:

$$\begin{cases} 2A_1 + & & KA_3 & = & 0 \\ A_1 + & A_2 + & A_3 & = & 0 \\ & 2A_2 + & 3A_3 & = & L \end{cases}$$

Pentru acest sistem, determinantul coeficienţilor $\Delta = 2(1+K)$ este acelaşi ca pentru sistemul (A2.1), dar ceilalţi determinanţi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sunt diferiţi:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & K \\ 0 & 1 & 1 \\ L & 2 & 3 \end{vmatrix} = -KL; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & K \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & L & 3 \end{vmatrix} = L(K-2);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & L \end{vmatrix} = 2L.$$

$$\begin{cases} A_0 = & 0 \\ A_1 = & \frac{\Delta_1}{\Delta} = & -\frac{KL}{2(1+K)} \\ A_2 = & \frac{\Delta_2}{\Delta} = & -\frac{L(K-2)}{2(1+K)} \\ A_3 = & \frac{\Delta_3}{\Delta} = & \frac{L}{1+K} \end{cases}$$

Ca urmare

$$N_4(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0$$

Adică

$$\mathbf{N_4(\xi)=\frac{L}{1+K}\xi^3+\frac{L(K-2)}{2(1+K)}\xi^2-\frac{KL}{2(1+K)}\xi+0}$$

Deci

$$\boxed{\mathbf{N_4(\xi)=\frac{1}{1+K}\left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(-\xi+\xi^2\right)\right]}}$$

Pe de altă parte

$$\mathbf{\tilde{N}_4(\xi)=\frac{3}{L}A_3\xi^2+\frac{2}{L}A_2\xi+\frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)}$$

Adică

$$\mathbf{\tilde{N}_4(\xi)=\frac{3}{L}\cdot\frac{L}{1+K}\xi^2+\frac{2}{L}\cdot\frac{L(K-2)}{2(1+K)}\xi+\frac{1}{L}\left(-\frac{KL}{2(1+K)}+\frac{K}{2}\cdot\frac{L}{1+K}\right)}$$

Deci

$$\boxed{\mathbf{\tilde{N}_4(\xi)=\frac{1}{1+K}\left[3\xi^2-2\xi+K\xi\right]}}$$

S-au determinat funcţiile de formă pentru deplasări $\mathbf{N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)}$ care ţin cont de forfecare, deci pentru elementul Timoshenko. În expresiile acestora, pentru K=0 se obţin polinoamele Hermite de gradul trei, deci pentru elementul Bernoulli-Euler.

De asemenea, s-au determinat funcţiile de formă pentru rotiri $\mathbf{\tilde{N}_1(\xi), \tilde{N}_2(\xi), \tilde{N}_3(\xi), \tilde{N}_4(\xi)}$ pentru elementul Timoshenko.

Când K=0 între aceste două seturi de funcţii există relaţia:

$$\mathbf{\tilde{N}_i(\xi)=\frac{1}{L}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}}, \qquad \mathbf{(i=1,\ldots,4)}.$$

Este utilă introducerea unui al treilea set de funcţii de formă care se folosesc la derivarea matricei de rigiditate şi se definesc astfel:

$$\lfloor \hat{N} \rfloor = \lfloor \tilde{N} \rfloor - \frac{1}{L} \left\lfloor \frac{dN}{d\xi} \right\rfloor .$$

Acestea sunt:

$$\begin{cases} \hat{N}_1(\xi) = & -\hat{N}_3(\xi) = & \frac{1}{L} \cdot \frac{K}{1+K} \\ \hat{N}_2(\xi) = & \hat{N}_4(\xi) = & \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{1+K} \end{cases}$$

Calculul funcţiilor de formă
în planul x-z

Folosind proprietăţile funcţiilor de formă, se calculează expresiile acestora şi în planul x-z.

Determinarea funcţiilor de formă $N_1(\xi)$ şi $\tilde{N}_1(\xi)$
în planul x-z

Pentru determinarea funcţiilor de formă se folosesc următoarele relaţii:

$$\begin{cases} w(\xi) = A_3\xi^3 + A_2\xi^2 + A_1\xi + A_0 \\ -\varphi(\xi) = \frac{3}{L}A_3\xi^2 + \frac{2}{L}A_2\xi + \frac{1}{L}\left(A_1 + \frac{K}{2}A_3\right) \end{cases}$$

De asemenea

$$\begin{cases} w(\xi) = N_1(\xi)w_i - N_2(\xi)\varphi_i + N_3(\xi)w_j - N_4(\xi)\varphi_j \\ -\varphi(\xi) = \tilde{N}_1(\xi)w_i - \tilde{N}_2(\xi)\varphi_i + \tilde{N}_3(\xi)w_j - \tilde{N}_4(\xi)\varphi_j \end{cases}$$

Atunci

$$\begin{cases} w(0)=1 & \Rightarrow A_0=1 \\ -\varphi(0)=0 & \Rightarrow \frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)=0 \\ w(1)=0 & \Rightarrow A_3+A_2+A_1+A_0=0 \\ -\varphi(1)=0 & \Rightarrow \frac{3}{L}A_3+\frac{2}{L}A_2+\frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)=0 \end{cases}$$

Se formează acelaşi sistem de ecuaţii (A2.1) ca şi pentru determinarea funcţiilor $N_1(\xi), \tilde{N}_2(\xi)$ din planul x-y:

$$\begin{cases} 2A_1 + & & KA_3 & = & 0 \\ A_1 + & A_2 + & A_3 & = & -1 \\ & 2A_2 + & 3A_3 & = & 0 \end{cases}$$

pentru care se obţin aceleaşi soluţii:

$$\begin{cases} A_0 = & 1 & \\ A_1 = & \frac{\Delta_1}{\Delta} = & -\frac{K}{1+K} \\ A_2 = & \frac{\Delta_2}{\Delta} = & -\frac{3}{1+K} \\ A_3 = & \frac{\Delta_3}{\Delta} = & \frac{2}{1+K} \end{cases}$$

Ca urmare, funcţia de formă pentru translaţii este:

$$N_1(\xi)=A_3\xi^3+A_2\xi^2+A_1\xi+A_0$$

Adică

$$N_1(\xi)=\frac{2}{1+K}\xi^3-\frac{3}{1+K}\xi^2-\frac{K}{1+K}\xi+1$$

Deci

$$\boxed{N_1(\xi)=\frac{1}{1+K}\left[1+2\xi^3-3\xi^2+K(1-\xi)\right]}$$

Pe de altă parte, funcţia de formă pentru rotaţii este:

$$-\tilde{N}_1(\xi)=\frac{3}{L}A_3\xi^2+\frac{2}{L}A_2\xi+\frac{1}{L}\left(A_1+\frac{K}{2}A_3\right)$$

$$-\tilde{N}_1(\xi)=\frac{3}{L}\cdot\frac{2}{1+K}\xi^2-\frac{2}{L}\cdot\frac{3}{1+K}\xi+\frac{1}{L}\left(-\frac{K}{1+K}+\frac{K}{2}\cdot\frac{2}{1+K}\right)$$

Deci

$$\boxed{\tilde{N}_1(\xi)=-\frac{1}{1+K}\left[\frac{1}{L}\left(6\xi^2-6\xi\right)\right]}$$

Calculul pentru celelalte seturi de funcţii de formă se face asemănător. Se observă că funcţiile de formă corespunzătoare planului x-z sunt identice cu cele din planul x-y, doar că funcţiile de formă pentru rotirea φ au semnul „minus” spre deosebire de cele pentru rotirea ψ :

Funcţii de formă pentru deplasări, valabile atât în planul x-y cât şi în planul x-z.

$$\begin{cases}N_1(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left[1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right],\\ N_2(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\dfrac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right],\\ N_3(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right),\\ N_4(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\dfrac{L}{2}\left(-\xi+\xi^2\right)\right].\end{cases}$$

Funcţii de formă pentru rotiri în planul x-z.

$$\begin{cases}\tilde{N}_{1\varphi}(\xi)=-\dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(6\xi^2-6\xi\right)\right]=-\tilde{N}_1(\xi),\\ \tilde{N}_{2\varphi}(\xi)=-\dfrac{1}{1+K}\left[3\xi^2-4\xi+1+K(1-\xi)\right]=-\tilde{N}_2(\xi),\\ \tilde{N}_{3\varphi}(\xi)=-\dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(-6\xi^2+6\xi\right)\right]=-\tilde{N}_3(\xi),\\ \tilde{N}_{4\varphi}(\xi)=-\dfrac{1}{1+K}\left[3\xi^2-2\xi+K\xi\right]=-\tilde{N}_4(\xi).\end{cases}$$

Deci

$$\lfloor\tilde{N}_\varphi\rfloor=-\lfloor\tilde{N}\rfloor$$

În urma calculelor efectuate pentru determinarea funcţiilor de formă pentru cele două tipuri de elemente de arbore, se observă că funcţiile de formă pentru elementul Bernoulli-Euler se pot obţine dacă în expresiile funcţiilor de formă corespunzătoare elementului Timoshenko factorul K devine egal cu zero. Aceeaşi legătură va exista şi între matricele de masă, giroscopică şi de rigiditate ce se vor determina pentru cele două tipuri de elemente de arbore.

Anexa 3

Calculul submatricelor de masă şi de rigiditate

pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler

Pentru stabilirea formelor explicite ale submatricelor de masă, giroscopică şi de rigiditate, este nevoie de calcularea integralelor următoare, pentru fiecare tip de element de arbore în parte:

$$\int_0^1 \lfloor \mathbf{N}(\xi) \rfloor^T \lfloor \mathbf{N}(\xi) \rfloor d\xi$$

$$\int_0^1 \lfloor \tilde{\mathbf{N}}(\xi) \rfloor^T \lfloor \tilde{\mathbf{N}}(\xi) \rfloor d\xi$$

$$\int_0^1 \left\lfloor \frac{d\tilde{\mathbf{N}}}{d\xi} \right\rfloor^T \left\lfloor \frac{d\tilde{\mathbf{N}}}{d\xi} \right\rfloor d\xi$$

$$\int_0^1 \lfloor \hat{\mathbf{N}} \rfloor^T \lfloor \hat{\mathbf{N}} \rfloor d\xi$$

În cele ce urmează se vor rezolva aceste integrale atât pentru elementul Bernoulli-Euler, cât şi pentru elementul Timoshenko (**Anexa 4)**. Se va ţine cont de faptul că funcţiile de formă sunt diferite pentru cele două tipuri de elemente, şi că pentru elementul Bernoulli-Euler, în formulele generale de mai sus, termenii care ţin de inerţia la rotaţie şi de forfecare sunt nuli.

Submatricea coerentă de masă pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler

Funcţiile de formă pentru elementul Bernoulli-Euler sunt următoarele:

Functii de formă pentru translatii

$$\begin{cases} N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ N_2(\xi) = L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ N_4(\xi) = L(-\xi^2 + \xi^3) \end{cases}$$

Functii de formă pentru rotatii

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(\xi) = \frac{1}{L}(6\xi^2 - 6\xi) \\ \tilde{N}_2(\xi) = 3\xi^2 - 4\xi + 1 \\ \tilde{N}_3(\xi) = \frac{1}{L}(-6\xi^2 + 6\xi) \\ \tilde{N}_4(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi \end{cases}$$

Din relaţia (3.138), submatricea de masă pentru un element de arbore, în cazul general, are forma:

$$\left[m^S\right] = \mu L \int_0^1 \lfloor N(\xi) \rfloor^T \lfloor N(\xi) \rfloor d\xi + \hat{\mu} L \int_0^1 \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor^T \lfloor \tilde{N}(\xi) \rfloor d\xi$$

Se poate calcula integrala: $\int_0^1 \lfloor N(\xi) \rfloor^T \lfloor N(\xi) \rfloor d\xi =$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\ L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \\ 3\xi^2 - 2\xi^3 \\ L(-\xi^2 + \xi^3) \end{bmatrix} \cdot \lfloor 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad L(-\xi^2 + \xi^3) \rfloor d\xi =$$

$$\begin{bmatrix} \int_0^1 (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)^2 d\xi & \int_0^1 L(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \cdot (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) d\xi & \int_0^1 (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \cdot (3\xi^2 - 2\xi^3) d\xi & \int_0^1 L(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) \cdot (-\xi^2 + \xi^3) d\xi \\ & \int_0^1 L^2 (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)^2 d\xi & \int_0^1 L(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \cdot (3\xi^2 - 2\xi^3) d\xi & \int_0^1 L^2 (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \cdot (-\xi^2 + \xi^3) d\xi \\ & & \int_0^1 (3\xi^2 - 2\xi^3)^2 d\xi & \int_0^1 L(3\xi^2 - 2\xi^3) \cdot (-\xi^2 + \xi^3) d\xi \\ \textbf{simetrică} & & & \int_0^1 L^2 (-\xi^2 + \xi^3)^2 d\xi \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ sim & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Al doilea termen din expresia submatricei de masă este nul pentru elementul Bernoulli-Euler, pentru că acesta nu ţine cont de inerţia la rotaţie, deci $\hat{\mu}$, care reprezintă masa de rotaţie pe unitatea de lungime, este egal cu zero.

Submatricea coerentă de masă pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler este:

$$\left[m^S\right] = \mu L \int_0^1 \lfloor N(\xi) \rfloor^T \lfloor N(\xi) \rfloor d\xi = \frac{\mu L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ \vdots & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ \vdots & \vdots & 156 & -22L \\ sim & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Submatricea de rigiditate pentru elementul Bernoulli-Euler

Din formula generală a subatricei de rigiditate, pentru elementul Bernoulli-Euler, al doilea termen este nul, deoarece acest element nu ţine cont de forfecare.

$$\left[k^S\right] = \frac{EI}{L} \int_0^1 \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor^T \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor d\xi + GA_S L \int_0^1 \lfloor \hat{N} \rfloor^T \lfloor \hat{N} \rfloor d\xi$$

Atunci, expresia submatricei de rigiditate pentru acest element este:

$$\left[k^S\right] = \frac{EI}{L} \int_0^1 \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor^T \left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor d\xi$$

Derivatele în raport cu ξ ale funcţiilor de formă pentru rotaţii sunt:

$$\left\lfloor \frac{d\tilde{N}}{d\xi} \right\rfloor^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{L}(12\xi - 6) \\ 6\xi - 4 \\ \frac{1}{L}(-12\xi + 6) \\ 6\xi - 2 \end{bmatrix}$$

Se poate calcula integrala: $\int_0^1 \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right]^T \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right] d\xi =$

$$= \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L}(12\xi - 6) \\ 6\xi - 4 \\ \frac{1}{L}(-12\xi + 6) \\ 6\xi - 2 \end{bmatrix} \cdot \left\lfloor \frac{1}{L}(12\xi - 6) \quad (6\xi - 4) \quad \frac{1}{L}(-12\xi + 6) \quad (6\xi - 2) \right\rfloor d\xi =$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{1}{L^2}(12\xi-6)^2 d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}(12\xi-6)\cdot(6\xi-4)d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L^2}(12\xi-6)\cdot(-12\xi+6)d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}(12\xi-6)\cdot(6\xi-2)d\xi \\ & \int_0^1 (6\xi-4)^2 d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}(6\xi-4)\cdot(-12\xi+6)d\xi & \int_0^1 (6\xi-4)\cdot(6\xi-2)d\xi \\ & & \int_0^1 \frac{1}{L^2}(-12\xi+6)^2 d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}(-12\xi+6)\cdot(6\xi-2)d\xi \\ \text{simetrică} & & & \int_0^1 (6\xi-2)^2 d\xi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{L^2} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{sim} & & & 4L^2 \end{bmatrix}$$

<u>Submatricea de rigiditate pentru elementul de arbore Bernoulli-Euler este:</u>

$$\left[k^S\right] = \frac{EI}{L} \int_0^1 \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right]^T \left[\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right] d\xi = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ \vdots & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \vdots & \vdots & 12 & -6L \\ \text{sim} & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix}.$$

Anexa 4

Calculul submatricelor de masă, giroscopică şi de rigiditate

pentru elementul Timoshenko

Submatricea de masă coerentă pentru elementul Timoshenko

Din relaţia (3.138), submatricea de masă pentru un element de arbore, în cazul general, are forma:

$$\left[\mathbf{m}^{S}\right]=\mu L\int_{0}^{1}\lfloor N(\xi)\rfloor^{T}\lfloor N(\xi)\rfloor d\xi+\hat{\mu}L\int_{0}^{1}\lfloor \tilde{N}(\xi)\rfloor^{T}\lfloor \tilde{N}(\xi)\rfloor d\xi$$

Funcţiile de formă pentru translaţii pentru elementul Timoshenko sunt următoarele:

$$\begin{cases} N_1(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left[1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right],\\ N_2(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\dfrac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right],\\ N_3(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right),\\ N_4(\xi)=\dfrac{1}{1+K}\left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\dfrac{L}{2}\left(-\xi+\xi^2\right)\right]. \end{cases}$$

Se poate calcula integrala: $\int_{0}^{1}\lfloor N(\xi)\rfloor^{T}\lfloor N(\xi)\rfloor d\xi=$

$$=\frac{1}{(1+K)^2}\int_0^1\begin{bmatrix}\left[1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right]\\ \left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right]\\ \left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right)\\ \left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(-\xi+\xi^2\right)\right]\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\left[1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right] & \left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right] & \left[3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right] & \left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\left(-\xi+\xi^2\right)\right]\end{bmatrix}d\xi=$$

$$
= \frac{1}{(1+K)^2}
\begin{bmatrix}
\int_0^1 \left[\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)^2 + K(1-\xi)\right]^2 d\xi &
\int_0^1 \left(1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right)\cdot \left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right]d\xi &
\int_0^1 \left(1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right)\cdot \left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right)d\xi &
\int_0^1 \left(1-3\xi^2+2\xi^3+K(1-\xi)\right)\cdot \left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi^2-\xi\right)\right]d\xi \\
 &
\int_0^1 \left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right]^2 d\xi &
\int_0^1 \left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right]\cdot \left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right)d\xi &
\int_0^1 \left[L\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi-\xi^2\right)\right]\cdot \left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi^2-\xi\right)\right]d\xi \\
 & &
\int_0^1 \left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right)^2 d\xi &
\int_0^1 L\left(3\xi^2-2\xi^3+K\xi\right)\cdot \left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi^2-\xi\right)\right]d\xi \\
\text{simetrică} & & &
\int_0^1 \left[L\left(-\xi^2+\xi^3\right)+K\frac{L}{2}\left(\xi^2-\xi\right)^2\right]^2 d\xi
\end{bmatrix}
$$

Al doilea termen din expresia submatricei de masă ţine cont de funcţiile de formă pentru rotaţii.

Funcţiile de formă pentru rotaţii pentru elementul Timoshenko sunt următoarele:

$$\begin{cases} \tilde{N}_1(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(6\xi^2 - 6\xi\right)\right] \\ \tilde{N}_2(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[3\xi^2 - 4\xi + 1 + K(1-\xi)\right] \\ \tilde{N}_3(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(-6\xi^2 + 6\xi\right)\right] \\ \tilde{N}_4(\xi) = \dfrac{1}{1+K}\left[3\xi^2 - 2\xi + K\xi\right] \end{cases}$$

Se poate calcula, apoi, integrala:

$$\int_0^1 \left\lfloor \tilde{N}(\xi) \right\rfloor^T \left\lfloor \tilde{N}(\xi) \right\rfloor d\xi =$$

$$= \frac{1}{(1+K)^2}\int_0^1 \begin{bmatrix} [\frac{1}{L}(6\xi^2 - 6\xi)] \\ [(1-4\xi+3\xi) + K(1-\xi)] \\ \frac{1}{L}(-6\xi^2 + 6\xi) \\ (3\xi^2 - 2\xi + K\xi) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} [\frac{1}{L}(6\xi^2 - 6\xi)] & [(1-4\xi+3\xi^2) + K(1-\xi)] & [\frac{1}{L}(-6\xi^2 + 6\xi] & [3\xi^2 - 2\xi + K\xi] \end{bmatrix} d\xi =$$

$$
= \frac{1}{(1+K)^2}
\begin{bmatrix}
\int_0^1 \frac{1}{L^2}\left(6\xi^2-6\xi\right)^2 d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}\left(6\xi^2-6\xi\right)\cdot\left(1-4\xi+3\xi^2+K(1-\xi)\right)d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L^2}\left(6\xi^2-6\xi\right)\cdot\left(-6\xi^2+6\xi\right)d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}\left(6\xi^2-6\xi\right)\cdot\left(3\xi^2-2\xi+K\xi\right)d\xi \\
 & \int_0^1 \left(1-4\xi+3\xi^2+K(1-\xi)\right)^2 d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}\left(1-4\xi+3\xi^2+K(1-\xi)\right)\cdot\left(-6\xi^2+6\xi\right)d\xi & \int_0^1 \left(1-4\xi+3\xi^2+K(1-\xi)\right)\cdot\left(3\xi^2-2\xi+K\xi\right)d\xi \\
 & & \int_0^1 \frac{1}{L^2}\left(-6\xi^2+6\xi\right)^2 d\xi & \int_0^1 \frac{1}{L}\left(-6\xi^2+6\xi\right)\cdot\left(3\xi^2-2\xi+K\xi\right)d\xi \\
\text{simetrică} & & & \int_0^1 \left(3\xi^2-2\xi+K\xi\right)^2 d\xi
\end{bmatrix}
$$

Atunci, submatricea de masă pentru elementul de arbore Timoshenko are următoarea expresie:

$$\left[\mathbf{m}^{S}\right]=$$

$$=\frac{1}{(1+K)^2}\left[\frac{\mu L}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 54 & -13L\\ \vdots & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ \vdots & \vdots & 156 & -22L\\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2\end{bmatrix}+K\frac{\mu L}{120}\begin{bmatrix}84 & 11L & 36 & -9L\\ \vdots & 2L^2 & 9L & -2L^2\\ \vdots & \vdots & 84 & -11L\\ \vdots & \vdots & \vdots & 2L^2\end{bmatrix}+\right.$$

$$+K^2\frac{\mu L}{120}\begin{bmatrix}40 & 5L & 20 & -5L\\ \vdots & L^2 & 5L^2 & -L^2\\ \vdots & \vdots & 40 & -5L\\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2\end{bmatrix}+\frac{\hat{\mu}L}{30L^2}\begin{bmatrix}36 & 3L & -36 & 3L\\ \vdots & 4L^2 & -3L & -L^2\\ \vdots & \vdots & 36 & -3L\\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2\end{bmatrix}+$$

$$\left.+K\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix}0 & -3L & 0 & -3L\\ \vdots & L^2 & 3L & -L^2\\ \vdots & \vdots & 0 & 3L\\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2\end{bmatrix}+K^2\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & 2L^2 & 0 & L^2\\ \vdots & \vdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & 2L^2\end{bmatrix}\right].$$

Sau altfel scrisă,

$$\left[\mathbf{m}^{S}\right]=\begin{bmatrix}m_{11}^{S} & m_{12}^{S} & m_{13}^{S} & m_{14}^{S}\\ \vdots & m_{22}^{S} & m_{23}^{S} & m_{24}^{S}\\ \vdots & \vdots & m_{33}^{S} & m_{34}^{S}\\ \text{sim} & \vdots & \vdots & m_{44}^{S}\end{bmatrix},$$

unde:

$$m_{11}^{S}=\left(156+294K+140K^2\right)\alpha_T+36\alpha_R$$

$$\mathbf{m}_{12}^{S} = \left(22 + 38.5K + 17.5K^2\right)L\alpha_T + \left(3 - 15K\right)L\alpha_R$$

$$\mathbf{m}_{13}^{S} = \left(54 + 126K + 70K^2\right)\alpha_T - 36\alpha_R$$

$$\mathbf{m}_{14}^{S} = -\left(13 + 31.5K + 17.5K^2\right)L\alpha_T + \left(3 - 15K\right)L\alpha_R$$

$$\mathbf{m}_{22}^{S} = \left(4 + 7K + 3.5K^2\right)L^2\alpha_T + \left(4 + 5K + 10K^2\right)L^2\alpha_R$$

$$\mathbf{m}_{23}^{S} = -\mathbf{m}_{14}^{S}$$

$$\mathbf{m}_{24}^{S} = -\left(3 + 7K + 3.5K^2\right)L^2\alpha_T - \left(1 + 5K - 5K^2\right)L^2\alpha_R$$

$$\mathbf{m}_{33}^{S} = \mathbf{m}_{11}^{S}$$

$$\mathbf{m}_{34}^{S} = -\mathbf{m}_{12}^{S}$$

$$\mathbf{m}_{44}^{S} = \mathbf{m}_{22}^{S}$$

unde am făcut notaţiile:

$$\alpha_T = \frac{\mu L}{420(1 + K)^2}$$

şi

$$\alpha_R = \frac{\hat{\mu} L}{30L^2(1 + K)^2}$$

Submatricea giroscopică pentru elementul de arbore Timoshenko

Din relaţia (3.138), submatricea giroscopică pentru un element de arbore, are forma:

$$\left[g^S\right] = \hat{\mu}_P L \int_0^1 \left\lfloor \tilde{N}(\xi) \right\rfloor^T \left\lfloor \tilde{N}(\xi) \right\rfloor d\xi = 2\left[m_R{}^S\right],$$

deci preluând din relaţia matricei de masă (3.160) determinată anterior, termenii care conţin factorul $\hat{\mu}L$ şi înmulţindu-i cu doi, se obţine <u>submatricea giroscopică pentru elementul de arbore Timoshenko:</u>

$$\left[g^s\right] = \frac{2}{(1+K)^2}\left[\frac{\hat{\mu}L}{30L^2}\begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ \vdots & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ \vdots & \vdots & 36 & -3L \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} + \right.$$

$$\left. +K\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix} 0 & -3L & 0 & -3L \\ \vdots & L^2 & 3L & -L^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 3L \\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2 \end{bmatrix} + K^2\frac{\hat{\mu}L}{6L^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 2L^2 & 0 & L^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2L^2 \end{bmatrix}\right]$$

sau

$$\left[g^s\right] = \begin{bmatrix} g^S_{11} & g^S_{12} & g^S_{13} & g^S_{14} \\ \vdots & g^S_{22} & g^S_{23} & g^S_{24} \\ \vdots & \vdots & g^S_{33} & g^S_{34} \\ \text{sim} & \vdots & \vdots & g^S_{44} \end{bmatrix}$$

în care, cu aceleaşi notaţii făcute anterior α_T şi α_R, elementele submatricei au următoarele valori:

$$g^S_{11} = 72\alpha_R$$

$$g^S_{12} = 2(3-15K)L\alpha_R$$

$$g^S_{13} = -72\alpha_R$$

$$g^S_{14} = 2(3-15K)L\alpha_R = g^S_{12}$$

$$g^S_{22} = 2\left(4+5K+10K^2\right)L^2\alpha_R$$

$$\mathbf{g}_{23}^{S} = -\mathbf{g}_{12}^{S}$$

$$\mathbf{g}_{24}^{S} = -2\left(1 + 5K - 5K^{2}\right)L^{2}\alpha_{R}$$

$$\mathbf{g}_{33}^{S} = \mathbf{g}_{11}^{S}$$

$$\mathbf{g}_{34}^{S} = \mathbf{g}_{23}^{S}$$

$$\mathbf{g}_{44}^{S} = \mathbf{g}_{22}^{S}$$

Submatricea de inerţie pentru elementul de arbore Timoshenko

Din relaţia (3.155), submatricea de inerţie pentru un element de arbore, are forma:

$$\left[k^{S}\right] = \frac{EI}{L}\int_{0}^{1}\left\lfloor\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right\rfloor^{T}\left\lfloor\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right\rfloor d\xi + GA_{S}L\int_{0}^{1}\left\lfloor\hat{N}\right\rfloor^{T}\left\lfloor\hat{N}\right\rfloor d\xi .$$

Pentru calculul acestei submatrici este nevoie de :
Derivatele în raport cu ξ ale funcţiilor de formă pentru rotaţii ale elementului Timoshenko:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{N}_1}{d\xi} = \dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(12\xi - 6\right)\right] \\ \dfrac{d\tilde{N}_2}{d\xi} = \dfrac{1}{1+K}\left[-4 + 6\xi - K\xi\right] \\ \dfrac{d\tilde{N}_3}{d\xi} = \dfrac{1}{1+K}\left[\dfrac{1}{L}\left(-12\xi + 6\right)\right] \\ \dfrac{d\tilde{N}_4}{d\xi} = \dfrac{1}{1+K}\left[6\xi - 2 + K\right] \end{cases}$$

Se poate rezolva integrala: $\displaystyle\int_{0}^{1}\left\lfloor\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right\rfloor^{T}\left\lfloor\frac{d\tilde{N}}{d\xi}\right\rfloor d\xi =$

$$=\frac{1}{(1+K)^2}\int_0^1\begin{bmatrix}\frac{1}{L}(12\xi-6)\\ 6\xi-4-K\xi\\ \frac{1}{L}(-12\xi+6)\\ 6\xi-2+K\end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot\left\lfloor\frac{1}{L}(12\xi-6)\quad(6\xi-4-K\xi)\quad\frac{1}{L}(-12\xi+6)\quad(6\xi-2+K)\right\rfloor d\xi=$$

$$=\frac{1}{(1+K)^2}\begin{bmatrix}\int_0^1\frac{1}{L^2}(12\xi-6)^2d\xi & \int_0^1\frac{1}{L}(12\xi-6)\cdot(6\xi-4-K\xi)d\xi & \int_0^1\frac{1}{L^2}(12\xi-6)\cdot(-12\xi+6)d\xi & \int_0^1\frac{1}{L}(12\xi-6)\cdot(6\xi-2+K)d\xi\\ & \int_0^1(6\xi-4-K\xi)^2d\xi & \int_0^1\frac{1}{L}(6\xi-4-K\xi)\cdot(-12\xi+6)d\xi & \int_0^1(6\xi-4-K\xi)\cdot(6\xi-2+K)d\xi\\ & & \int_0^1\frac{1}{L^2}(-12\xi+6)^2d\xi & \int_0^1\frac{1}{L}(-12\xi+6)\cdot(6\xi-2+K)d\xi\\ \text{simetric} & & & \int_0^1(6\xi-2+K)^2d\xi\end{bmatrix}$$

Este nevoie, de asemenea, de diferenţele dintre funcţiile de formă pentru rotaţii şi derivatele în raport cu ξ ale funcţiilor de formă pentru translaţii ale elementului Timoshenko:

$$\begin{cases}\hat{N}_1=\frac{K}{1+K}\cdot\frac{1}{L}\\ \hat{N}_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{K}{1+K}\\ \hat{N}_3=-\frac{K}{1+K}\cdot\frac{1}{L}\\ \hat{N}_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{K}{1+K}\end{cases}$$

pentru a rezolva integrala:

$$\int_0^1 \lfloor \hat{N} \rfloor^T \lfloor \hat{N} \rfloor d\xi = \frac{K^2}{(1+K)^2} \int_0^1 \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{L} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} d\xi =$$

$$= \frac{K^2}{(1+K)^2} \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{1}{L^2} d\xi & \int_0^1 \frac{1}{2L} d\xi & \int_0^1 \left(-\frac{1}{L^2}\right) d\xi & \int_0^1 \frac{1}{2L} d\xi \\ & \int_0^1 \frac{1}{4} d\xi & \int_0^1 \left(-\frac{1}{2L}\right) d\xi & \int_0^1 \frac{1}{4} d\xi \\ & & \int_0^1 \frac{1}{L^2} d\xi & \int_0^1 \left(-\frac{1}{2L}\right) d\xi \\ \text{simetrică} & & & \int_0^1 \frac{1}{4} d\xi \end{bmatrix}$$

Atunci, forma finală a <u>submatricei de rigiditate pentru elementul de arbore Timoshenko</u> este:

$$\left[k^S\right] = \frac{1}{1+K} \cdot \frac{EI}{L^3} \left[\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ \vdots & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ \vdots & \vdots & 12 & -6L \\ \vdots & \vdots & \vdots & 4L^2 \end{bmatrix} + K \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & L^2 & 0 & -L^2 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & L^2 \end{bmatrix} \right]$$

Bibliografie

1. Aalami B. and Atzori B., "Flexural Vibrations and Timoshenko's Beam Theory", *AIAA J.,* 12, p.679-685, 1974.

2. Abbas B.A.H. and Thomas J., "Dynamic Stability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation", *J. Sound Vib.,* 60, p.33-44, 1978.

3. Abbas B.A.H. and Thomas J., "The Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beams", *J. Sound Vib.,* 51 (1), p.123-137, 1977.

4. Abbas B.A.H., "Vibration of Timoshenko Beams With Elastically Restrained Ends", *J. Sound Vib.,* 97, p.541-548, 1984.

5. Akkella S. and Craggs A., "Modifications to a Timoshenko Beam-Shaft Finite Element to Include Internal Disks and Changes in Cross-Section", *J. Sound Vib.,* 106, p.227-239, 1986.

6. Ali R., Hedges J.L. and Mills B., "Dynamic Analysis of an Automobile Chassis Frame", *Proc. Inst. Mech. Engrs., Automobile Div.,* 185, p.683-690, 1971.

7. Alămoreanu E. şi Chiriţă R., Bare şi plăci din materiale composite, *Bucureşti, Editura tehnică,* 1997.

8. Anderson R.A., "Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory", *J. Appl. Mech., Trans. ASME,* 20, p.504-510, 1953.

9. Anghel V., Pastramă Şt. D., Mareş C., Metode şi programe pentru calculul structurilor, *UPB,* 1998.

10. Archer J.S., "Consistent Mass Matrix of Distributed Mass Systems", *J. Structural Division, Proc. of the ASCE,* 89, ST4, p.161, 1963.

11. Archer J.S., "Consistent Matrix Formulations for Structural Analysis Using Finite-Element Techniques", *AIAA J.,* 3(10), p.1910-1918, 1965.

12. Bansal R.N. and Kirk R.G., "Stability and Damped Critical Speeds of Rotor-Bearing Systems", *J. Engng. Ind., Trans. ASME,* 97(1), p.1325-1337, 1975.

13. Bauer F.L., "Das Verfahren der Treppeniteration und verwandte Verfahren zur Lösung algebrischer Eigenwertprobleme", *ZAMP, VIII, p.214-233,*1957.

14. Berbente C., Metode numerice, *Editura tehnică, Bucureşti,* 1997.

15. Bhashyam G.R. and Prathap G., "The Second Frequency Spectrum of *Timoshenko* Beams", *J. Sound Vib.,* 76 (3), p.407-420, 1981.

16. Bigret R., Vibrations des machines tournantes et des structures, *tome 4, partie B, B10, Technique et Documentation,* Paris, 1980, p.269-287.

17. Blumenfeld M., Introducere în metoda elementelor finite, *Editura tehnică, Bucureşti*, 1995.

18. Bogacz R., Nowakowski S. and Papp K., "On the Stability of a Timoshenko Beam on a Elastic Foundation Under a Moving Spring-Mass System", *Acta Mech.,* 61 (1-4), p.117-128, 1986.

19. Boley B.A. and Chao C., "Timoshenko Beams Under Dynamic Loads", *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 25, p.21-27, 1958.

20. Brunelle E.J., "Elastic Instability of Transversely Isotropic Timoshenko Beams", *AIAA J.,* 8, p.2271-2273, 1970.

21. Brunelle E.J., "The Statics and Dynamics of a Transversely Isotropic Timoshenko Beam", *J. Comp. Materials,* 4, p.404-416, 1970.

22. Buzdugan Gh., Fetcu L. şi Radeş M., Vibraţii mecanice, *Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti*, 1982.

23. Buzdugan Gh., Mihăilescu E. şi Radeş M., Vibration Measurement, *Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht,* 1986.

24. Carnegie W. and Thomas J., "The Effects of Shear Deformation and Rotary Inertia on the Lateral Frequencies of Cantilever Beams in Bendings", *J. Engng. Indus., Trans ASME,* 94, p.367-378, 1972.

25. Carnegie W., Thomas J. and Dokumaci E., “An Improved Method of Matrix Displacement Analysis in Vibration Problems”, *Aeronaut. Q.,* 20, p.321-332, 1969.

26. Carnoy E. J., Géradin M., “On the Practical Use of Lanczos Algorithm in Finite Element Applications to Vibration and Bifurcation Problems”, *in Matrix Pencils, Springer Verlag,* 1982.

27. Carr W.B., “The Effect of Shear Flexibility and Rotary Inertia on the Natural Frequencies of Uniform Beams”, *Aeronaut. Q.,* 21, p.79-90, 19970.

28. Cheng F.Y., “Vibrations of Timoshenko Beams and Frameworks”, *ASCE J. Struc. Div.,* 96, p.551-571, 1970.

29. Cheng Yung-Hsiang, “General Dynamic-Stiffness Matrix of a Timoshenko Beam for Transverse Vibrations”, *Earthquake Engng. Struct. Dynam.,* 15, p.391-402, 1987.

30. Childs D.W. and Graviss K., “A Note on Critical-Speed Solutions for Finite-Element-Based Rotor Mode 1”, *J. Mechanical Design, Trans. ASME,* 104, p.412, apr.1982.

31. Constantin R., Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială, *UPB,* 1980.

32. Constantinescu V.N. ş.a., Lagăre cu alunecare, *Editura tehnică, Bucureşti* 1980.

33. Cowper G.R., “On the Accuracy of Timoshenko’s Beam Theory”, *ASCE J. Engrg. Mech.,* 94, p.1447-1453, 1968.

34. Cowper G.R., “The Shear Coefficient in Timoshenko’s Beam Theory”, *J. Applied Mechanics, Trans. ASME,* p.335-340, 1966.

35. Capron M.D. and Williams F.W., “Exact Dynamic Stiffnesses for an Axially Loaded Uniform Timoshenko Member Embedded in an Elastic Medium”, *J. Sound Vib.,* 124, p.453-466, 1988.

36. Crandall S.H., “The Timoshenko Beam on an Elastic Foundation”, *Proc. 3rd Midwestern Conf. Solid Mech.,* p.146-159, 1957.

37. Davis R., Henshell R.D. and Warburton G.B., "A Timoshenko Beam Element", *J. Sound Vib.,*22(4), p.475-487, 1972.

38. Dawe D.J., "A Finite Element for Vibration Analysis of Timoshenko Beams", *J. Sound Vib.,* 60, p.11-20, 1978.

39. Dokumaci E., "Bounds to the Natural Frequencies of Asymmetric Timoshenko Beams by Contraction of Elastically Orthogonally Refined Finite Elements", *J. Sound Vib.,* 110, p.323-336, 1986.

40. Dolph C., "On the Timoshenko Theory of Transverse Beam Vibrations", *Q. Appl. Math.,* 12, p.175-187, 1954.

41. Dong S.B. and Wolf J.A.Jr., "Effect of Transverse Shear Deformation on Vibrations of Planar Structure Composed of Beam Type Elements", *J. Acoust. Soc. Amer.,* 53, p.120-127, 1973.

42. Downs B., "Transverse Vibrations of a Uniform Simply Supported Timoshenko Beam without Transverse Displacement", *J.Appl.Mech., Trans. ASME,* 43, p.671-673, 1976.

43. Downham E., "Theory of Shaft Whirling. A Fundamental Approach to Shaft Whirling", *The Engineer,* p.519-522, 552-555, 660-665, 1957.

44. Downs B., "An Equivalent Inertia Matrix for a Segment of a Uniform Timoshenko Beam of Any Geometry and Material", *J. Sound Vib.,* 105, p.109-120, 1986.

45. Downs B., "Transverse Vibrations of Cantilever Beams Having Unequal Breadth and Depth Tapers", *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 44, p.737-742, 1977.

46. Dunkerley S., "On the Whirling and Vibration of Shafts", *Trans. Roy. Soc. (London),* vol.185, Series A, p.279-360, 1894.

47. Ebner A.M. and Billington D.P., *"Steady State Vibration of Damped Timoshenko Beams",* ASCE J. Struc. Engng. *p.737-760, 1968.*

48. Edney S.L., Fox C.H. and Williams E.J., "Finite Element Analysis of Tapered Rotors", *Proceedings Seventh International Modal Analysis Conference, Las Vegas,* 2, p.1402-1407, 1989.

49. Edney S.L., Fox C.H. and Williams E.J., "Tapered Timoshenko Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis", *J.Soun Vib.* 137(3), p.463, 1990.

50. Egle D.M., "An Approximate Theory for Transverse Shear Deformation and Rotary Inertia Effects in Vibrating Beams", *NASA CR-1317,* 1969.

51. Elishakoff I. And Livshits D., "Some Closed-Form Solutions in Random Vibration of Bresse-Timoshenko Beams", *Probabilistic Engng. Mech.,* 4, p.49-58, 1989.

52. Eshleman R.L., "Flexible Rotor-Bearing System Dynamics", *The American Society of Mechanical Engineers,* New York, 1972.

53. Föppl A., "Das Problem der Laval'schen Turbinewelle", *Civilingenieur,* 41, p.332-342, 1895.

54. Fawzy I., "Orthogonality of Generally Normalized Eigenvectors and Eigenrows", *AIAA J.,* 15(2), p.276, 1977.

55. Filipich C.P. and Rosales M.B., "A Variant of Rayleigh's Method Applied to Timoshenko Beams Embedded in a Winkler-Pasternak Medium", *J. Sound Vib.,* 124, p.443-451,1988.

56. Flaherty F.T., "Viscoelastic Timoshenko Beam Vibration", *Ph. D. Thesis, New York Univ.,* 1963.

57. Gasch R., "Unwucht-erzwungene Schwingungen und Stabilität von Turbinenlaufern", *Konstruktion,* 25, Heft 5, p.161-168, 1973.

58. Genta G. and Gugliotta A., "A Conical Element for Finite Element Rotor Dynamics", *J.Sound Vib.,* 120(1), p.175-183, 1988.

59. Genta G., Vibration of Structures and Machines, *Springer-Verlag, New York,* 1993.

60. Genta G., Gugliotta A. and Brussino G., "Un modello per lo studio dinamico dei rotori", *VII Congress Naz .AIMETA, Trieste,* 1984.

61. Géradin M. and Kill N., "A New Approach to Finite Element Modeling of Flexible Rotors", *Engineering Computations,* 1, p.52-64, 1984.

62. Géradin M., “Eigenvalue Algorithms for Stability and Critical Speeds Analysis of Rotating Systems”, *Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference, Florida, February,* 1988.

63. Géradin M., Kill N., “Dynamic Analysis of Stuctures with Flexible Rotors”, *2nd International Symposium on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Aachen, April 1-3,* 1985.

64. Gheorghiu H.,Constantinescu I., Hadăr A., Petre C., Méthodes numériques pour le calcul des structures de résistance, *Editura BREN,* Bucureşti, 1999.

65. Glasgow D.A. and Nelson H.D., “Stability Analysis of Rotor-Bearing Systems Using Component Mode Synthesis”, *J. Mechanical Design, Trans. ASME,* 102, p.352-359, apr.1980.

66. Glienicke J., “Feder- und Dämpfungskonstanten von Gleitlagern für Turbomaschinen und deren Einfluss auf das Schwingungsverhalten eines einfachen Rotors”, *Dissertation,* T.H. Karlsruhe, 1966.

67. Gmür T.C. and Rodrigues J.D., “A Set of C° Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis”, *Proceedings of the Ninth International Modal Analysis Conference, Florence, Italy,* April 15-18, 1991.

68. Goodman L.E., “Discussion of paper “Flexural Vibrations in Uniform Beams According to the Timoshenko Theory”, by R. A. Anderson”, *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 21, p.202-204, 1954.

69. Green R.B., “Gyroscopic Effects on the Critical Speeds of Flexible Rotors”, *J. Appl. Mech., Trans. ASME,* 70, p.369-376, 1948.

70. Greenhill L.M., Bickford W.B. and Nelson H.D., “A Conical Beam Finite Element for Rotor Dynamics Analysis”, *J. Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Trans. ASME,* 107, p.421-430, oct.1985.

71. Gupta R.S. and Rao S.S., “Finite Element Eigenvalue Analysis of Tapered and Twisted Timoshenko Beams”, *J. Sound Vib.,* 56, p.187-200, 1978.

72. Gutierrez R.H., Laura P.A.A. and Rossi R.E., "Natural Frequencies of a Timoshenko Beam of Non Uniform Cross Section Elastically Restrained at One End and Guided at the Other", *J. Sound Vib.,* 1990.

73. Guyan R.J., "Reduction of Stiffness and Mass Matrices", *AIAA Journal,* 3, p.380, 1965.

74. Hagg A.C. and Sankey G.O., "Elastic and Damping Properties of Oil Film Journal Bearings for Applications to Unbalance Vibration Calculations", *J. Appl. Mech., Trans. ASME,* 25, p.141, 1958.

75. Hashish E. and Sankar T.S., "Finite Element and Modal Analysis of Rotor-Bearing Systems under Stochastic Loading Conditions", *J. Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Trans. ASME,* 106, p.80-89, 1984.

76. Hayashikawa T. and Watanabe N., "Vertical Vibration in Timoshenko Beam Suspension Bridges", *ASCE J. Engng. Mech.,* 110, p.341-356,1984.

77. Herrman C., "Forced Motions of Timoshenko Beams", *J. Appl. Mech., Trans. ASME,* 22, p.53-64, 1955.

78. Howe C., Howe R. and Rauch L., "Application of the Electric Differential Analyzer to the Oscillations of Beams Including Shear and Rotatory Inertia", *Ext. Memo. UMM-79, Univ. of Michigan,*1956.

79. Howson W.P. and Williams F.W., "Natural Frequencies of Frames with Axially Loaded Timoshenko Members", *J. Sound Vib.,* 26, p.503-515, 1973.

80. Huang T.C. and Kung C.S., "New Tables of Eigenfunctions Representing Normal Modes of Vibration of Timoshenko Beams", *Dev. Theoretical Appl. Mech.,* 1, p.59-71, 1962.

81. Huang T.C., "Effect of Rotatory Inertia and Shear on the Vibrations of Beams Treated by the Approximate Methods of Ritz and Galerkin", *Proc. 3rd U.S. Natl. Congr. Appl. Mech., ASME,* p.189-194, 1958.

82. Huang T.C., "The Effect of Rotary Inertia and Shear Deformation on the Frequency and Normal Mode Equations of Uniform Beams with Simple End Conditions", *J. Appl. Mech., Trans. ASME,* 28, p.579-584, 1961.

83. Imbert J.F., Analyse des structures par éléments finis, *Cepadues Editions,* 1979.

84. Irie T., Yamada G. and Takahashi I., "Vibration and Stability of a Nonuniform Timoshenko Beam Subjected to a Follower Force", *J. Sound Vib,* 70, p.503-512, 1980.

85. Isaa M.S., Wang T.M. and Hsiaon B.T., "Extensional Vibrations of Continuous Circular Curved Beams with Rotary Inertia and Shear Deformation, I: Free Vibration", *J. Sound Vib.,* 114, p.297-308, 1987.

86. Jäcker M., "Vibration Analysis of Large Rotor-Bearing-Foundation Systems Using a Model Condensation for the Reduction of Unknowns", *Proc.Second Int.Conf."Vibration in Rotating Machinery",* Cambridge, U.K., Paper C280, p.195-202, 1980.

87. Jeffcott N., "Lateral Vibration of Loaded Shafts in the Neighborhood of a Whirling Speed - The Effect of Want of Balance", *Philosophical Magazine,* Series 6, vol.37, p.307-314, 1919.

88. Jensen J.J., "On the Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", *J. Sound Vib.,* 87, p.621-636, 1983.

89. Kaneko T., "On Timoshenko's Correction for Shear Vibrating Beams", *J.Physics D: Appl. Physics,* 8, p.1927-1936, 1975.

90. Kapur K., "Vibrations of a Timoshenko Beam Using a Finite Element Approach", *J. Acoust. Soc. Amer.,* 40, p.1058-1063, 1966.

91. Kassai A., "Contribution a l'étude dynamique des rotors amortis", *Thèse, L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon,* 1989.

92. Kounadis A.N. and Katsikadelis J.T., "Shear and Rotary Inertia Effect on Beck's Column", *J. Sound Vib.,* 49, p.171-178, 1976.

93. Kounadis A.N., "Stability of Elastically Restrained Timoshenko Cantilevers with Attached Masses Subjected to a Follower Force", *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 44, p.731-736, 1977.

94. Krämer E., Dynamics of Rotors and Foundations, *Springer Verlag,* Berlin, 1993.

95. Krishnan A. and Sithu M., “Influence of Rotary Inertia on the Fundamental Frequency of a Cantilever Beam”, *J. Sound Vib.,* 85, p.136-140, 1982.

96. Krishnan A. and Srinivasulu N., ”Studies on Vibration of Timoshenko Beams”, *J. Sound Vib.,* 100, p.445-451, 1985.

97. Kruszewski E.T., “Effect of Transverse Shear and Rotatory Inertia on the Natural Frequency of a Uniform Beam”, *NACA-TN-1909,* Langley AFB, VA 1949.

98. Lalanne M. and Ferraris G., “Rotordynamics Prediction in Engineering”, *John Wiley & Sons,* New York, 1990.

99. Lee C.-W., Vibration Analysis of Rotors, *Kluwer Acad. Publ.,* Dordrecht, 1993.

100. Lee H.C. and Brisshopp K.E., “Application of Integral Equations to the Vibrations of a Wedge with Rotary Inertia and Shear”, *J. Franklin Inst.,* 277, p.327-336,1964.

101. Lee H.C., “A Generalized Minimum Principle and Its Application to the Vibration of a Wedge with Rotatory Inertia and Shear”, *J. Appl. Mech., Trans ASME, 30, p.176-180, 1963.*

102. Levinson M. and Cooke D.W., “On the Two Frequency Spectra of Timoshenko Beams”, *J. Sound Vib.,* 84, p.319-326, 1982.

103. Li H. and Dempsey J.P., “Unbonded Contact of Finite Timoshenko Beam on Elastic Layer”, *ASCE J. Engrg. Mech.,* 4, p.1265-1284, 1988.

104. LORD Rayleigh, Theory of Sound, *London: Macmillan and Co.,*1895.

105. Lund J.V., “The Stability of an Elastic Rotor in Journal Bearings with Flexible Damped Supports”, *J.Basic Eng,. Trans. ASME,* 87, 1965.

106. Lund J.W. and Orcutt F.K., “Calculations and Experiments on the Unbalance of a Flexible Rotor”, *J. Engng. Ind., Trans. ASME,* 89(4), p.785-796, 1967.

107. Lund J.W. and Sternlicht B., “Rotor-Bearing Dynamics with Emphasis on Attenuation”, *J. Basic Engng., Trans. ASME,* 84(4), p.491, 1962.

108. Lund J.W., “Modal Response of a Flexible Rotor in Fluid Film Bearings”, *J.Engng Ind., Trans. ASME,* 96, p.525-533, 1974.

109. Lund J.W., “Response Characteristics of a Rotor with Flexible Damped Supports”, *Proceedings of IUTAM Symposium, Lyngby, Denmark,* p.319, 1974.

110. Lund J.W., “Rotor Bearings Dynamics Design Technology. Part III, Design Handbook for Fluid-Film Type Bearings”, *M.T.I. Report* AFSCR 65-TR-45, 1965.

111. Lund J.W., “Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings”, *J.Engng.Ind., Trans. ASME,* Series B, 96(2), p.509-517, May 1974.

112. Lundén R. and Akesson B., “Damped Second-Order Rayleigh Timoshenko Beam Vibration in Space – An Exact Complex Dynamic Member Stiffness Matrix”, *Intl. J. Num. Methods Engng.,* 19, p.431-449, 1983.

113. Massalas C.V. and Kalpakidis V.K., “Coupled Thermo-Elastic Vibration of a Timoshenko Beam”, *Intl. J. Engrg. Sci.,* 22, p.459-466, 1984.

114. Maurizi M.J. and Rosales M.B., “Free Vibrations of Timoshenko Beams on a Winkler-Pasternak Foundation”, *Dept. of Engng., Nacional del Sur, Bahia Blanca,*1986.

115. Maurizi M.J., Rossi R.E. and Belles P.M., “Vibrations of Timoshenko Beams Elastically Restrained Against Rotation and Translation”, *J. Sound Vib.,* 1990.

116. Mead D.J., “A Method of Analyzing Wave Propagation in Periodic StructuresL: Applications to Periodic Timoshenko Beams and Stiffened Plates”, *J. Sound Vib.,* 104, p.9-28, 1986.

117. Meirovitch L, Computational Methods in Structural Dynamics, *Sijthoff & Noordhoff, Rockville, Maryland USA,* 1980.

118. Mindlin R.D. and Deresiewicz H., “Timoshenko’s Shear Coefficient for Flexural Vibrations of Beams”, *Proc. 2nd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech., ASME,* p.175-178, 1954.

119. Mindlin R.D., “Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates”, *J. Appl. Mech., Trans.ASME,* 18 (1), p.31-38, 1951.

120. Nelson H.D. and McVaugh J.M., “The Dynamics of Rotor-Bearing Systems Using Finite Elements”, *J. Engng. Ind., Trans. ASME,* 98(2), p.593-600, may1976.

121. Nelson H.D., “A Finite Rotating Shaft Element Using Timoshenko Beam Theory”, *J.Mechanical Design, Trans. ASME,* 102, p.793-803, oct.1980.

122. Nemat-Nasser S., “Instability of a Cantilever Under a Follower Force According to Timoshenko Beam Theory”, *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 34, p.484-485, 1967.

123. Newkirk B.L. and Taylor H.D., “Oil Film Whirl - An Investigation of Disturbances on Oil Films in Journal Bearings”, *General Electric Review,* vol.28, 1925.

124. Newkirk B.L., “Shaft Whipping”, *General Electric Review,* vol.27, p.169-178, 1924.

125. Nickel R.E. and Secor G.A., “Convergence of Consistently Derived Timoshenko Beam Finite Elements”, *Intl. J. Num. Methods Engng.,* 5, p.243-253, 1972.

126. Nordmann R., Maschinendynamik, *Vorlesung,* Univ. Kaiserslautern, 1991.

127. Nordmann R., “Ein Näherungsverfahren zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen von Turborotoren mit Gleitlagern Spalterregung, äuβerer und innerer Dämpfung”, *Dissert. T. H. Darmstadt,* 1974.

128. Norwood C.J., Cubitt N.J. and Downs B., “A Note on the Equations on Motion for the Transverse Vibration of a Timoshenko Beam Subjected to an Axial Force”, *J. Sound Vib.,* 70, p.4475-4479, 1980.

129. Özgűven H.N. and Özkan Z.L., “Whirl Speeds and Unbalance Response of Multibearing Rotors Using Finite Elements”, *ASME Paper 83-DET-89, Design and Production Technical Conference, Dearborn, MI,* Sept.11-14, 1983, *and J.Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Trans. ASME,* 106, p.72-79, 1984.

130. Pan H., “Vibration of a Viscoelastic Timoshenko Beam”, *ASCE J. Engng. Mech., EM2,* 92, p.213-234, 1966.

131. Park Y.P., “Dynamic Stability of a Free Timoshenko Beam Under a Controlled Follower Force”, *J. Sound Vib.,* 113, p.404-406, 1987.

132. Pascovici M.D., Lagăre radiale hidrodinamice, *Institutul Politehnic Bucureşti,* 1977.

133. Părăuşanu I., “Contribuţii la studiul dinamic al maşinilor cu rotor”, *Teză de doctorat,* Universitatea Politehnica Bucureşti, 204pag., 1995.

134. Părăuşanu I., Dinamica maşinilor cu rotor, *Editura Cavallioti,* Bucureşti, 1996.

135. Părăuşanu I., Dynamique de machines, *UPB Departamentul de Ştiinţe Inginereşti, Divizia de Inginerie Mecanică,* Bucureşti, 1996.

136. Poritsky H., “Contribution to the Theory of Oil Whip”, *Trans. ASME,* 75, p.1153-1161, 1953.

137. Prohl M.A., “A General Method for Calculating Critical Speeds of Flexible Rotors”, *Trans. ASME,* vol.67, *J.Appl.Mech.,* vol.12, no.3, p.A142-A148, Sept.1945.

138. Przemieniecki J.S., “Theory of Matrix Structural Analysis”, *McGraw Hill, New York,* 1968.

139. Radeş M., Dinamica sistemelor rotor-lagăre, vol.I, *UPB, Catedra Rezistenţa materialelor, Laboratorul Integritatea Maşinilor,* Bucureşti, 1996.

140. Radeş M., Dynamics of Machinery, Part II, *UPB, Departamentul de Ştiinţe Inginereşti, Divizia de Inginerie Mecanică,* Bucureşti, 1995.

141. Radeş M., "Mixed Precession Modes of Rotor-Bearing Systems", *in "Schwingungen in Rotierenden Maschinen III",* Proceedings of SIRM'95, Vieweg, Braunschweig, 1995.

142. Rankine W.J.M., "On the Centrifugal Force of Rotating Shafts", *The Engineer,* vol.27, p.249, Apr.1869.

143. Rao G.V., Raju I.S. and Raju K.K., "Nonlinear Vibrations of Beams Including Shear Deformation and Rotary Inertia", *AIAA J.,* 14, p.685-687, 1976.

144. Robertson D., "The Vibration of Revolving Shafts", *Phil. Mag.,* Series 7, vol.13, p.862, 1932; "The Whirling of Shafts", *The Engineer,* vol.158, p.216-217, 228-231, 1934; "Transient Whirling of a Rotor", *Phil. Mag.,* Series 7, vol.20, p.793, 1935.

145. Rossettos J.N. and Squires D.C., "Modes and Frequencies of Transversely Isotropic Slightly Curved Timoshenko Beams", *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 40, p.1029-1034, 1973.

146. Rossi R.E. and Laura P.A.A., "Vibrations of a Timoshenko Beam Clamped at One End and Carrying a Finite Mass at the Other", *Appl. Acoust.,* 1990.

147. Rossi R.E., Gutierrez R.H. and Laura P.A.A., "A Note on Transverse Vibrations of a Timoshenko Beam of Non Uniform Thickness Clamped at One End and Carrying a Concentrated Mass at the Other", *J. Sound Vib.,* 1990.

148. Rouch K. and Kao J., "Dynamic Reduction in Rotor Dynamics by the Finite Element Method", *J.Mechanical Design, Trans. ASME,* 102, p.360-368, 1980.

149. Rouch K.E. and Kao J.S., "A Tapered Beam Finite Element for Rotor Dynamic Analysis", *J. Sound Vib.,* 66(1), p.119-140, 1979.

150. Ruhl R.L. and Booker J.F., "A Finite Element Model for Distributed Parameter Turborotor Systems", *J. Engng. Industry, Trans. ASME,* Series B, 94(1), p.126-132, Febr.1972.

151. Ruhl R.L., "Dynamics of Distributed Parameter Turborotor Systems: Transfer Matrix and Finite Element Techniques", *Ph.D.Thesis,* Cornell Univ., Ithaca, N.Y., Jan.1970.

152. Saito H., Chonan S. and Kobari T., "Vibrations of Vertical Rods with an Attached Mass", *J. Sound Vib.,* 84, p.519-527, 1982.

153. Sarma B.S. and Varadan T.K., "Ritz Finite Element Approach to Nonlinear Vibration of a Timoshenko Beam", *Comm. Appl. Numer. Methods,* 1, p.23-32, 1985.

154. Severn R.T., "Inclusion of Shear Deformation in the Stiffness Matrix for a Beam-Element", *J. Strain Analysis,* 5, p.239-241, 1970.

155. Shastry B.P. and Venkaateswara Rao G., "Dynamic Stability of Bars Considering Shear Deformation", *Computers Struct.,* 19, p.823-828, 1984.

156. Sinha S.K., "Dynamic Stability of a Timoshenko Beam Subjected to an Oscillating Axial Force", *J. Sound Vib.,* 131, p.509-514, 1989.

157. Smith D.M., "The Motion of a Rotor Carried by a Flexible Shaft in Flexible Bearings", *Proc. Roy. Soc. London,* Series A, vol.142, p.92, 1933.

158. Someya T. (ed.), "Journal-Bearing Data Book", *Springer Verlag,* Berlin, 1988.

159. Stephen N.G. and Levinson M., "A Second Order Beam Theory", *J. Sound Vib.,* 67, p.293-305, 1979.

160. Stephen N.G., "The Second Frequency Spectrum of Timoshenko Beams", *J. Sound Vib.,* 80 (4), p.578-582, 1982.

161. Stephenson R.W. and Rouch K.E., "Modeling of Rotors with Axisymmetric Solid Harmonic Elements", *J.Sound Vib.,* 131, p.431-443, 1989.

162. Stephenson R.W. and Rouch K.E., "Modeling Rotating Shafts Using Axisymmetric Solid Finite Elements with Matrix Reduction", *J.Vibration and Acoustics, Trans. ASME,* 115, p.484-489, oct.1993.

163. Sternlicht B., "Elastic and Damping Properties of Cylindrical Journal Bearings", *J.Basic Eng., Series D, Trans. ASME,* 81, p.101-108, 1959.

164. Stodola A., "Neuere Beobachtungen über die Kritischen Umlaufzahlen von Wellen", *Schweizer. Bauzeitung,* vol.68, p.210-214, 1916.

165. Subrahmanyam K.B., Kulkarni S.V. and Rao P.M., “Dean and Plass Method Calculations of the Flexural Frequencies of Timoshenko Beams”, *J. Sound Vib.,* 81, p.141-146, 1982.

166. Sun C.T., “On the Equations for a Timoshenko Beam Under Initial Stress”, *J. Appl. Mech., Trans ASME,* 39, p.282-285, 1972.

167. Sutherland J.G. and Goodman L.E., “Vibrations of Prismatic Bars Including Rotary Inertia and Shear Corrections”, *Rept. No. N6-ORI-71 T06, Project NR-064-183,* Univ. of Illinois, Urbana, IL, p.11-23, 1971.

168. Thomas D.L. and Abbas B.A.H., “Finite Element Model for the Analysis of Timoshenko Beams”, *J. Sound Vib.,* 41, p.291-299, 1975.

169. Thomas D.L., Wilson J.M. and Wilson R.R., “Timoshenko Beam Finite Elements”, *J.Sound and Vibration,* 31(3), p.315-330, 1973.

170. Thomas J. and Abbas B.A.H., “Dynamic Stability of Timoshenko Beams by Finite Element Method”, *J. Engng. Ind., Trans ASME,* 98, p.1145-1151, 1976.

171. Thomas J. and Abbas B.A.H., Author’s Reply to Comments on “Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam”, *J. Sound Vib.,* 46, p.288-290, 1976.

172. Timoshenko S.P., “On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross Section:, *Philosophical Magazine,* 43, p.125-131, 1922.

173. Timoshenko S.P., “On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Prismatic Bars”, *Philosophical Magazine,* 41, p.744-746, 1921.

174. To C.W.S., “A Linearly Tapered Beam Finite Element Incorporating Shear Deformation and Rotary Inertia for Vibration Analysis”, *J. Sound Vib.,* 78, p.475-484, 1981.

175. Traill-Nash R.W. and Collar A.R., “The Effect of Shear Flexibility and Rotary Inertia on the Bending Vibration of Beams”, *Q. J. Mech. Appl. Math.,* 6, p.186-222, 1953.

176. Venkakeswara Rao G. and Shastry B.P., "Some Aspects of the Dynamic Stability of Hinged-Hinged Bars on an Elastic Foundation Considering the Effects of Shear Deformation and Rotatory Inertia", *J. Sound Vib.,* 132, p.346-349, 1989.

177. Vest T.A. and Darlow M.S., "A Modified Conical Beam Element Based on Finite Element Analysis Experimental Correlation", *Proceedings, ASME Noise and Vibration Conference,* Montreal, Canada, 1989.

178. Vişan D., Hadăr A., Constantin N., Stoicescu C., "Tensiuni şi deformaţii în plăci plane realizate din compozite stratificate armate cu fibre, solicitate mecanic şi termic"*; Conferinţa aniversară cu participare internaţională "Metode experimentale şi numerice în Rezistenţa materialelor"* – p.157-165, Timişoara, 16 octombrie 1998.

179. Vişan D., "Stadiul actual al cercetărilor în domeniul modelării dinamice a sistemelor rotor-lagăre", *Referat de doctorat,* Universitatea Politehnica Bucureşti, 97pag., 1999.

180. Vişan D., "Probleme de valori proprii specifice dinamicii rotorilor", *Referat de doctorat,* Universitatea Politehnica Bucureşti, 45pag., 2000.

181. Vişan D., "Metode şi algoritmi pentru calculul răspunsului dinamic al sistemelor rotor-lagăre", *Referat de doctorat,* Universitatea Politehnica Bucureşti, 81pag., 2000.

182. Vişan D., Părăuşanu I., "Influenţa cuplajului asupra răspunsului dinamic al liniilor de arbori", *Buletinul Conferinţei Naţionale de Dinamica Maşinilor CDM 97, Braşov,*p.81-84, 1997.

183. Vişan D., Radeş M., " Moduri de precesie mixtă în dinamica sistemelor rotor-lagăre", *Buletinul Conferinţei Naţionale de Dinamica Maşinilor CDM 94", vol.1, Braşov,* p.25-33, 24-25 noiembrie 1994.

184. Vişan D., Părăuşanu I., Anghel V., "Predicţia răspunsului dinamic al turbomaşinilor"*, Construcţia de maşini, Anul LI,* 8, p.33-34, 1999.

185. Vişan D., Gheorghiu H., Hadăr A., Coteţ C., "Model informatic pentru calculul răspunsului dinamic al structurilor plane din bare"*, Tehnologii Calitate Maşini Materiale,* 37, p.209-216, 1999.

186. Vişan D., Radeş M., "Assessment of Tapered Shaft Finite Elements for Rotor Dynamics Analysis", *Buletinul Conferinţei Naţionale de Dinamica Maşinilor CDM 2001, Braşov,*p.105-110, 18-20 oct., 2001.

187. Wang T.M. and Gagnon L.W., "Vibrations of Continuous Timoshenko Beams on Winkler Pasternak Foundations", *J. Sound Vib.,* 59, p.211-220, 1978.

188. Wang T.M. and Kinsman T.A., "Vibrations of Frame Structures According to the Timoshenko Theory", *J. Sound Vib.,* 14, p.215-227, 1971.

189. Wang T.M. and Stephens J.E., "Natural Frequencies of Timoshenko Beams on Pasternak Foundation", *J. Sound Vib.,* 51, p.149-155, 1977.

190. Wang T.M., Kieronski J.F. and Marquis J.P., "Effect of Rotary Inertia and Shear on Natural Frequencies of Cantilever Bridges", *J. Sound Vib.,* 40, p.513-520, 1975.

191. Wen R.K. and Beylerian B.N., "Elasto-Plastic Response of Timoshenko Beams", *ASCE J. Struc. Engng.,* p.131-146, 1967.

192. Wettergren H.L. and Olsson K-O., "Dynamic Instability of a Rotating Asymmetric Shaft with Internal Viscous Damping, Supported in Anisotropic Bearings", *J.Sound Vib.,* 195(1), p.75, 1997.

193. Wettergren H.L., "Dynamic Instability of Composite Rotors", *IFToMM Fourth International Conference on Rotor Dynamics, Chicago,* p.287, 1994.

194. Wettergren H.L., "Influence of Imperfections on the Eigenfrequencies of a Rotating Composite Shaft", *J.Sound and Vibration,* vol.204(1), p.99, 1997.

195. Wettergren H.L., "Material Damping in Composite Rotors", *J.Composite Materials,* vol.32, no.7, 1998.

196. Wettergren H.L., "On the Behavior of Material Damping Due To Multi-frequencies Excitation", *J.Sound Vib.,* 206(5), p.725, 1997.

197. Wilkinson J. H., The Algebric Eigenvalue Problem, *Clarendon Press, Oxford,* 1965.

198. Willway T.A. and White R.G., "The Effects of Matrix Complex Moduli on the Dynamic Properties of CFRP Laminae", *Composite Science and Technology,* vol.36, p.77, 1989.

199. Wu X.X. and Sun C.T., "Vibration of Thin-Walled Composite Structures", *Vibration and Behavior of Composite Structures,* vol.14, p.47, 1989.

200. Yaghmai I. And Frohrib D.A., "A Sensitivity Analysis of the Effects of Interconnection Joint Size, Flexibility and Inertia on the Natural Frequencies of Timoshenko Frames", *J. Sound Vib.,* 75, p.329-346, 1981.

201. Yamamoto T. and Ota H., "On the Unstable Vibration Carrying an Unsymmetrical Rotor", *J. App. Mech., Trans. ASME,* p.515-522, sept.1964.

202. Yamamoto T., "On the Critical Speed of a Shaft Supported in Ball Bearing", *Trans. Soc. Mech. Engrs. (Japan),* vol.20, no.99, p.750-760, 1954.

203. Yokoyama T., "Parametric Instability of Timoshenko Beams Resting on an Elastic Foundation", *Computers Struct.,* 28, p.207-216, 1988.

204. Yokoyama T., "Vibrations and Transient Responses of Timoshenko Beams Resting on Elastic Foundations", *Ing. Arch.,* 57, p.81-90, 1987.

205. Zorzi E.S. and Nelson H.D., "Finite Element Simulation of Rotor-Bearing Systems with Internal Damping", *J. Engng. Power, Trans. ASME,* 99(1), p.71-76, 1977.

206. Jei Y.-G. and Kim Y.-J., "Modal Testing Theory of Rotor-Bearing Systems", *J. of Vibration and Acoustics, Trans. ASME,* 115, p.165-600, April 1993.

207. Kim W., Argento A. and Scott R.A., "Free Vibration of a Rotating Tapered Composite Timoshenko Shaft", *J. Sound Vib., 226(1) p.125-147,* 1999.

208. Kim W., Argento A. and Scott R.A., "Forced Vibration and Dynamic Stability of a Rotating Tapered Composite Timoshenko Shaft",*1999 ASME Design Engineering Technical Conferences,* September 12-15, 1999, Las Vegas, Nevada.

209. Rajakumar Ch., "Dynamic Analysis of Rotors with ANSYS", *Swanson Analysis Systems Inc. Techn.Note.*

210. Vişan D., "Influenţa conicizării asupra rigidităţii arborilor cu porţiuni tronconice", *Buletinul Conferinţei de Vibraţii Mecanice CVM 2002, Timişoara,* 23-24 Mai 2002, (în curs de publicare).

211. Radeş M., Anghel V., Sorohan Şt., Vişan D., "Analiza modală a structurii maşinilor rotative", *Contract nr. 33084, Tema 12, Cod CNCSIS 689, etapa I,* 61pag., 1999.

212. Radeş M., Anghel V., Sorohan Şt., Vişan D., "Analiza modală a structurii maşinilor rotative", *Contract nr. 33127, Tema 58, Cod CNCSIS 1052, etapa II,* 86pag., 2000.

213. Radeş M., Anghel V., Sorohan Şt., Vişan D., "Analiza modală a structurii maşinilor rotative", *Contract nr. 33084, Tema 101, Cod CNCSIS 130, etapa III,* 78pag., 2001.

214. Hohn A., "Die mechanische Auslegung von Dampfturbogruppen", *BBC Aktiengesellschaft Brown, Boveri &Cie, Druckschrift Nr. CH-T 110273 D.*

215. Părăuşanu I., Vişan D., "Analiza dinamică predictivă", *Prima Conferinţă a Energeticienilor din România,* p.433-444, Bucureşti, 26-27 mai, 2000.

216. Laura P.A.A., Maurizi M.J. and Rossi R.E., "Feature Article. A Survey of Studies Dealing with Timoshenko Beams", *SVD, vol. 22, no. 11, p. 3-9,* Nov. 1990.

217. Dias M.Jr., Allemang R.J., "Some Insights into the Simultaneous Forward and Backward Whirling of Rotors", *Proceedings of IMAC 19, A Conference on Structural Dynamics,* p.1257-1263, Kissimmee, Florida, 5-8 Feb., 2001.

218. Dias M.Jr., Allemang R.J., "Experimental Verification of Simultaneous Forward and Backward Whirling of Flexible Rotors", *Proceedings of IMAC 20, A Conference on Structural Dynamics*, Los Angeles, California, 4-7 Feb., 2002.

219. Vişan D.C., „Modelarea dinamică a sistemelor rotor-lagăre" – Teza de doctorat, conducător ştiinţific: prof.dr.ing.Mircea Radeş, *Universitatea POLITEHNICA Bucureşti*, 2002.

ISBN
978-973-718-990-5

ISBN 978-973-718-990-5